

Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Secondo appello a.a. 2024/25.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2025

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo il triangolo T di vertici $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Calcolare il perimetro di T .
2. (1 punto) Calcolare l'area di T .
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiana della retta r passante per P_2 e P_3 .
4. (1 punto) Stabilire se T è acutangolo o ottusangolo.
5. (1 punto) Calcolare il circocentro C di T .
6. (1 punto) Stabilire se C è interno o esterno a T , motivando la risposta.
7. (1 punto) In \mathcal{V}_O^2 dare la definizione di somma, ovvero dati due punti $A, B \in \mathcal{E}^2$ dare la definizione di $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 consideriamo la retta $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : x - 3y + 2z = 2$.

1. (1 punto) Calcolare $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r .
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di π .
4. (1 punto) Calcolare $P_0 = r \cap \pi$.
5. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta passante per P_0 ed ortogonale a π .
6. (1 punto) Siano $r : AX = b$ ed $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ una retta ed un piano di \mathbb{R}^3 , rispettivamente. Scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di r e π e dedurre una tabella con le possibili posizioni reciproche.
7. (1 punto) Sapendo che $u = v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{R}^3$, quanto fa $(2v_1 - v_2) \wedge (v_1 + 3v_2)$?

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 5 \\ -8 & -3 & 0 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare $P_A(x)$.*
2. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
3. (1 punto) *Calcolare A^{-1} .*
4. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. (1 punto) *Sia A è una matrice diagonalizzabile con autovalori $\{1, -1\}$. Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
6. (1 punto) *Sia A una matrice $h \times k$ di rango r . Calcolare $\dim \text{Ker}(A)$.*
7. (1 punto) *Dimostrare che due basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.*

Esercizio 4. 1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = (v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ è un base di \mathbb{R}^2 .

2. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_2 = (w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ è un base di \mathbb{R}^3 .

3. (1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = 2w_1 - w_2 + w_3$ e $f(v_2) = w_1 + w_2$. Calcolare la matrice F associata a f nelle basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 .

4. (1 punto) Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione lineare tale che $g(w_1) = v_1 + v_2$, $g(w_2) = v_1 - v_2$ e $g(w_3) = 2v_1 - v_2$. Calcolare la matrice G associata a g nelle basi \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_1 .

5. (1 punto) Calcolare la matrice A associata a $g \circ f$ nella base canonica $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ di \mathbb{R}^2 .

6. (1 punto) Stabilire se $g \circ f$ è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.

7. (1 punto) Sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Dimostrare che $\text{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di W .

Esercizio 5. In \mathbb{R}^4 , consideriamo:

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare una base \mathcal{B}_U di U .

2. (2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U .

3. (1 punto) Calcolare la distanza di P da U .

4. (2 punti) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione dei $U + W$.

5. (1 punto) Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme $(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

