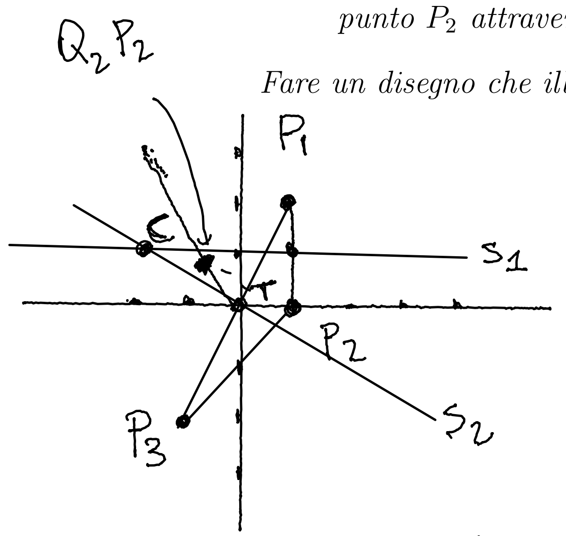
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo* $P_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3.*
2. *(2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse s_1 del segmento $\overline{P_1P_2}$ e dell'asse s_2 del segmento $\overline{P_1P_3}$.*
3. *(1 punto) Calcolare il circocentro C del triangolo T.*
4. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ circoscritta al triangolo T.*
5. *(1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_2 attraverso la retta passante per P_1 e P_3.*

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\left|\det\left(P_1-P_3 \,|\, P_2-P_3\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}\right|$

$= \frac{4}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\right| = 2$

$\|\overrightarrow{P_3P_1}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{5}$; $\|\overrightarrow{P_3P_2}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{P_2P_1}\| = 2$. Perimetro $= 2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2$.

2) $s_1 : \overrightarrow{P_2P_1}\cdot X = \overrightarrow{P_2P_1}\cdot \frac{P_1+P_2}{2}$ ovvero $s_1 : y = 1$

$s_2 : \overrightarrow{P_3P_1}\cdot X = 0$ ovvero $s_2 : x+2y=0$

3) $C = s_1 \cap s_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

4) raggio $= \|\overrightarrow{CP_1}\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10} = \|\overrightarrow{CP_2}\| = \|\overrightarrow{CP_3}\| = r$

$\mathcal{C} = \left\{ C + r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \,\middle|\, \theta\in[0,2\pi) \right\} : (x+2)^2+(y-1)^2 = 10$

5) La pendenza di $\overline{P_3P_1}$ è $m=2$. $Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$.

$P_4 = Q_2 P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&4\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo* $P = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *(1 punto) Calcolare la distanza di* P *dal piano* $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *(1 punto) Consideriamo il piano affine* $\pi = P + \pi_0$ *e la retta affine* $r = (P - v_1) + \langle v_1 + v_2 \rangle$. *Stabilire la posizione reciproca di* r *e* π *senza cambiare la loro forma.*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane di* π.
5. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta* s *passante per i punti* P *e* $Q = v_1 + v_2$.
6. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* P *su* π_0.

Sol.:

1) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

2) $\mathrm{dist}(P, \pi_0) = \| pr_{v_1 \wedge v_2}(P) \| = \dfrac{|P \cdot v_1 \wedge v_2|}{\| v_1 \wedge v_2 \|} = \dfrac{|1-6+3|}{\sqrt{14}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}} = \dfrac{1}{7}\sqrt{14}$

3) $r = \{ P - v_1 + t(v_1 + v_2) \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ P + (t-1)v_1 + t v_2 \mid t \in \mathbb{R} \} \subset P + \pi_0$.

4) $\pi : v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P$ ovvero $\pi : x - 2y + 3z = -2$

5) $s = P + \langle Q - P \rangle = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle : \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$

6) Cerchiamo una base ortogonale di π_0:

$F_1 = v_1$, $F_2' = v_2 - \dfrac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix} \rightsquigarrow F_2 = \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$

$pr_{\pi_0}(P) = \dfrac{P \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \dfrac{P \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \dfrac{8}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix}24\\57\\30\end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}8\\19\\10\end{pmatrix}$

"coefficienti di Fourier"

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{-1} con il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. *Calcolare A^3.*
7. *Nello spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali, si consideri il sottospazio vettoriale $U = Span(\mathbf{1}_3, A, A^2, A^3, \cdots, A^{100})$. Trovare una base di U.*

Sol.: 1) $\det A = -2$. 2) A è la matrice compagna del polinomio $x^3 - 3x + 2$. Perciò, $P_A(x) = x^3 - 3x + 2$.

3) $Av = A^1 - 2A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2v \Rightarrow v$ è autovettore di autovalore -2.

4) Dal punto 3 sappiamo che $P_A(-2) = 0$.

4)
$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x + 2 & x+2 \\ \cline{2-2} x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^2 - 3x + 2 & \\ -2x^2 - 4x & \\ \hline x + 2 & \end{array}$$

$\Rightarrow P_A(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1) = (x+2)(x-1)^2$

$V_1(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow mg_A(1) = 1 < 2 = ma_A(1) \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

5) $A^3 - 3A + 2\mathbb{1}_3 \overset{C-H}{=} 0_3 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 3\mathbb{1}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $A^3 \overset{C-H}{=} 3A - 2\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 7) Una base di U è $(\mathbb{1}_3, A, A^2)$.

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *data da*

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}\right).$$

1. *(1 punto) Calcolare* $f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
2. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
3. *(1 punto) Trovare la matrice* A *associata ad* f *nelle basi standard.*
4. *(1 punto) Sia* $\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. *Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
5. *(1 punto) Sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica funzione lineare tale che*

$$\begin{aligned} g(e_1) &= v_1 + v_2 - v_3 \\ g(e_2) &= 2v_1 - 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

   Calcolare la matrice C *associata a* g *nella base standard di* $\mathbb{R}^2$ *e nella base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{R}^3$.
6. *(1 punto) Calcolare la matrice* D *associata a* $f \circ g$ *nella base standard di* $\mathbb{R}^2$.
7. *(1 punto) Se* D *è invertibile calcolare* D^{-1}, *altrimenti calcolare una base del suo nucleo.*

<u>Sol.</u> : 1) $f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2-2-1 \\ -4+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $f(X) = AX$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quindi $f = S_A$. Poiché S_A è lineare anche f lo è.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ è lin. ind.

$\Rightarrow$ $|\mathcal{B}| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. 5) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6)
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 & = & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ F_e \Vert & & \downarrow F_{\mathcal{B}} & & \downarrow F_e & & \Downarrow F_e \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$D = ABC$ dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ 6) $D^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente piano di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 0. \end{cases}$$

1. *(4 punti) Calcolare la matrice* P_U *di proiezione ortogonale su* U*.*
2. *(3 punti) Calcolare la distanza del vettore* $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *da* U*.*

<u>Sol.</u>: $U = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_U = A\,(A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P_U v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{dist}(v, U) = \| v - P_U v \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2}.$