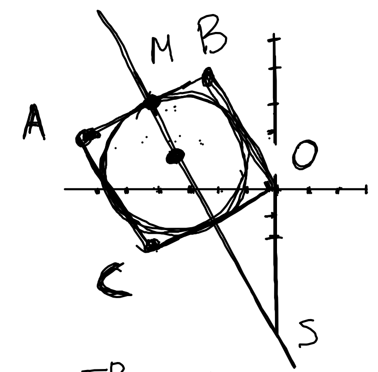
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{AB}$.
2. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse* s *del segmento* $\overline{AB}$.
3. *(1 punto) Calcolare il punto* C *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine* O *attraverso l'asse* s.
4. *(1 punto) Stabilire se il quadrilatero* $ABCO$ *è un quadrato.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrilatero* $ABCO$.
6. *(1 punto) Scrivere la matrice* R_θ *di rotazione in senso anti-orario di un angolo* θ.
7. *(1 punto) Dimostrare che date due isometrie* f *e* g *di* $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ *la loro composizione* $f \circ g$ *è ancora un'isometria.*

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $M = \frac{1}{2}(A+B) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $s: \vec{AB} \cdot X = \vec{AB} \cdot M$. $\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. $s: 2x + y = -5$

3) $s: y = -2x - 5$. $m = -2$. $Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$.

$Q_{-2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. $C = M + Q_{-2}(-2) = M - Q_{-2} M = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -C = \vec{CO} \Rightarrow$ è un parallelogramma. $|\vec{AB}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = |\vec{OB}|$
$\Rightarrow$ è un rombo. $\vec{BA} \cdot \vec{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ è un quadrato.

5) centro $= \frac{1}{2} \vec{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. raggio $= \frac{1}{2} |\vec{OB}| = \frac{\sqrt{20}}{2}$.

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{20}}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\}$: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$

6) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

7) $\| f\circ g(x) - f \circ g(y) \| \underset{f \text{ iso}}{=} \| g(x) - g(y) \| \underset{g \text{ iso}}{=} \| x - y \| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow f \circ g$ è un'isometria.

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

1. *(1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.*
2. *(1 punto) Trovare l'equazione equazione cartesiana del piano $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$.*
3. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2, senza cambiare la loro forma.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici v_1, v_2 e $v_1 + v_2$.*
6. *(1 punto) Siano $r = P + \langle v \rangle$ ed $s : AX = b$ due rette di $\mathbb{R}^3$. Scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di r ed s e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.*
7. *(1 punto) E' vero che $(v \wedge w) \wedge u = v \wedge (w \wedge u)$? Se l'affermazione è vera, dimostrarla, altrimenti, esibire un contro-esempio.*

Sol.: 1) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$

2) $\pi : v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P_1$. $\pi : -4x + y + 3z = 9$

3) $\det(v_1 | -v_2 | P_2 - P_1) = -\det(v_1 | v_2 | P_2 - P_1) = -v_1 \wedge v_2 \cdot P_2 - P_1 = = -\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 7 \neq 0$

$\Rightarrow$ r_1 e r_2 sono sghembe.

4) $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_2 - P_1, \langle v_1, v_2 \rangle) = \dfrac{|v_1 \wedge v_2 \cdot (P_2 - P_1)|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \dfrac{|-7|}{\sqrt{26}} = \dfrac{7}{\sqrt{26}}$

5) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| (v_1 + v_2 - v_1) \wedge (v_1 + v_2 - v_2) \| = \frac{1}{2} \| v_2 \wedge v_1 \| = \frac{1}{2} \| -v_1 \wedge v_2 \| = \frac{\sqrt{26}}{2}$

6) $r \cap s \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t : tAv = b - AP \overset{\text{Rouché-Capelli}}{\Longleftrightarrow} rg(Av) = rg(Av | b - AP)$

$r \parallel s \Leftrightarrow Av = 0_{\mathbb{R}^2}$.

	rg Av	rg $(Av \mid b-AP)$
$r \equiv s$	0	0
$r \parallel s$, $r \neq s$	0	1
$r \cap s = \{P_0\}$	1	1
sghembe	1	2

7) No! Ad esempio,

$(e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -18 & 3 & 6 \\ -12 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Trovare una base di ker(A).*
2. *(1 punto) Trovare una base di Col(A) e calcolare il rango di A.*
3. *(1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
6. *(1 punto) Enunciare la formula della dimensione per un'applicazione lineare $f : V \to W$.*
7. *(1 punto) Dare un'idea di come si dimostra la formula della dimensione.*

Sol. : $A = (-6v \,|\, v \,|\, 2v) = v(-6,1,2) = v w^t$ con $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} v w^t \underset{\uparrow}{=} \operatorname{Ker} w^t = \operatorname{Ker}(-6,1,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Teo : $\operatorname{Ker} A^t A = \operatorname{Ker} A$

2) $\operatorname{Col} A = \langle v \rangle$, $\operatorname{rg} A = 1$.

3) $P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x+6 & -1 & -2 \\ 18 & x-3 & -6 \\ 12 & -2 & x-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -1 & -2 \\ 6x & x-3 & -6 \\ 0 & -2 & x-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -1 & -2 \\ 0 & x+3 & 6 \\ 0 & -2 & x-4 \end{pmatrix}$

$= x \det\begin{pmatrix} x+3 & 6 \\ -2 & x-4 \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x+3 & -2x \\ -2 & x \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & x \end{pmatrix} = x^2(x-1)$

altrimenti : $Av = v w^t v = w \cdot v \, v = v$. $\Rightarrow Sp(A) = \{0,1\} \Rightarrow P_A(x) = x^2(x-1)$.

4) Lo è. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \operatorname{diag}(0,0,1)$

5) Poiché $D = BAB^{-1}$ e $D^n = D$ $\forall n \geq 1$, $A^n = BD^nB^{-1} = BDB = A$ $\forall n \geq 1$

6) $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

7) Si prende una base $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (v_1, \dots, v_k)$ di $\operatorname{Ker} f$, la si estende ad una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ di V. Si dimostra che $(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$ è una base di $\operatorname{Im} f$. Quindi $\dim \operatorname{Im} f = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 4. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo la funzione $f : V \to V$ data da*

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(1) + p'(x^2-1) - xp(x)$$

1. *(1 punto) Calcolare $f(2+x-3x^2)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che f è lineare.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata ad f nella base standard di V.*
4. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{Ker(f)}$ del nucleo di f.*
5. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{Im(f)}$ dell'immagine di f.*
6. *(1 punto) Calcolare la matrice C associata ad f nella base $\mathcal{B} = (1+x, 1+2x, -x+x^2)$ di V (sia in partenza che in arrivo).*
7. *(1 punto) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Sol: 1) $f(2+x-3x^2) = 5+3x-3x^2$.

2) $f = m_{x+1} \circ Val_{x-1} + Val_1 + Val_{x^2-1} \circ D - m_x$. Quindi f è una combinazione lineare di composizioni di f.ni lineari e quindi f è lineare.

3) $f(1) = 2$
$f(x) = 1$
$f(x^2) = -x+x^2$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $Ker\, A = Ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow Ker\, f = \langle 1-2x \rangle$. $\mathcal{B}_{Ker f} = (1-2x)$

5) $Col\, A = \langle A^1, A^3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow Im\, f = \langle 2, -x+x^2 \rangle$. $\mathcal{B}_{Im f} = (1, -x+x^2)$.

6) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\forall v_1, v_2 \in Ker\, f$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $f(\alpha v_1 + \beta v_2) \underset{f \text{ lineare}}{=} \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = 0_W$

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in Ker\, f$.

Inoltre, $f(0_V) \underset{f \text{ lineare}}{=} 0_W$ e quindi $0_V \in Ker\, f$.

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *e la matrice* $A = vv^t$.

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di* A.
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_v *di proiezione ortogonale sulla retta generata da* v *e la distanza del punto* $Q = (8, 4, -4, 4)^t$ *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.

Sol.: 1) $A = (-v|v|v|-v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $Col A = \langle v \rangle$. $\mathcal{B}_{Col A} = (v)$. $rg\, A = 1$.

3) $Ker\, A = (Col A^t)^\perp \underset{A = A^t}{=} Col A^\perp = \langle v \rangle^\perp : v \cdot X = 0$. $Ker\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) Poiché $A = A^t$, A è ort. diag. per il teorema spettrale.

5) $Av = vv^tv = v \cdot v\, v = 4v \Rightarrow Sp\, A = \{0, 4\}$.

6) $\left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{B}_{Ker A} = \mathcal{B}_{V_0(A)}$.

$F_1 = v_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1$

$F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} F_2$

$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} F_3$

$B = (E_1 | E_2 | E_3 | \frac{1}{2} v)$ $D = diag(0, 0, 0, v \cdot v = 4)$

7) $P_v = v(v^tv)^{-1}v^t = \frac{1}{4} A$. $dist(Q, \pi) = \| P_v Q \| = \left\| A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$

$= 3\sqrt{4} = 6$