Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

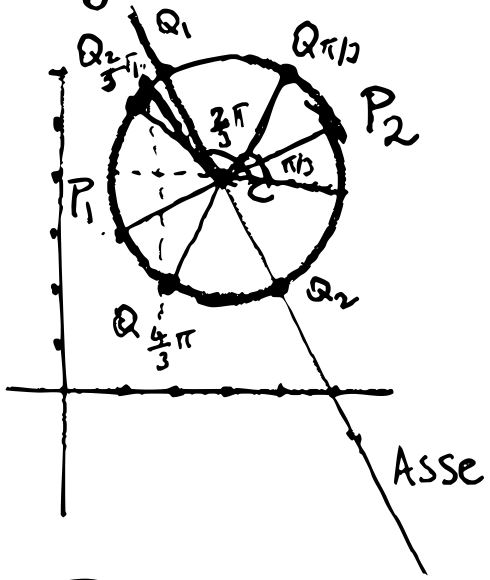
1. *(2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane dell'asse del segmento* $\overline{P_1P_2}$.
2. *(2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *che ha il segmento* $\overline{P_1P_2}$ *come diametro.*
3. *(1 punto) Sia* C *il centro della circonferenza* $\mathcal{C}$. *Sia* $Q_\theta = C + rP_\theta$, *dove* $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)^t$, *un punto di* $\mathcal{C}$. *Disegnare* $Q_{\pi/3}$, $Q_{2\pi/3}$ *e* $Q_{4\pi/3}$.
4. *(1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo convesso* α *formato dal segmento* $\overline{CP_2}$ *e dal segmento* $\overline{CQ_{2\pi/3}}$.
5. *(1 punto)Trovare due punti distinti* Q_1 *e* Q_2 *tali che il quadrilatero* $P_1Q_2P_2Q_1$ *sia un quadrato ed abbia* $\overline{P_1P_2}$ *come diagonale.*

Fare un disegno (possibilmente usando riga e compasso) che illustri la situazione.

Sol.: 1. $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Asse : $4x + 2y = 20$ ovvero $2x + y = 10$. Asse $= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2.



$C = M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r = \frac{1}{2}\|P_2 - P_1\| = \sqrt{5}$

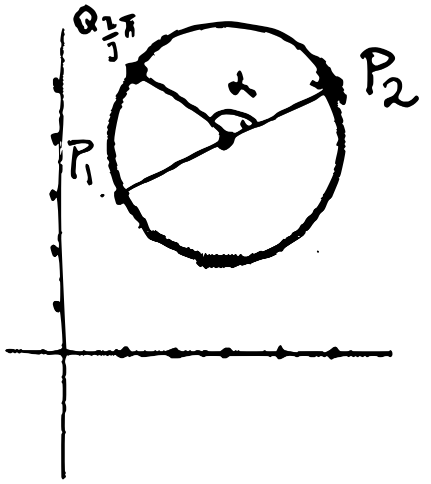
$\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

3. Notiamo che $\overline{P_1P_2}$ forma un angolo la cui Tangente è $\frac{1}{2} < 1$ con l'asse delle ascisse. Poiché $Tg\,\frac{\pi}{3} > 1$, $Q_{\pi/3}$ è come in figura.

Tg Asse $= -2$, $Tg\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{2} > -2$

$\Rightarrow Q_{2\pi/3}$ è come in figura.



4. $\cos\alpha = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} < 0$

5. $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *si considerino le due rette:*

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad ed \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di* r *ed* s*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche per* r*.*
3. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per* s*.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r *ed* s*.*
5. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_{s_0} *di proiezione ortogonale sul sottospazio di giacitura* s_0 *di* s*.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* $Q = (7, 7, 7)^t$ *da* s*.*

Sol.: 1. $r : AX = b$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $s = X_0 + \langle v \rangle$, dove $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ r ed s non sono parallele.

$AX_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. $b - AX_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = Av \rangle \Rightarrow r \cap s = \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow$ r ed s sono sghembe.

2. $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = Y_0 + \langle w \rangle$

3. $\mathrm{Ker}\,(2\ -1\ 1) = \mathrm{Ker}\,(1\ -\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow s : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$

4. $\mathrm{dist}(r, s) = \min\limits_{h,k \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}(Y_0 + hw, X_0 + kv) = \min\limits_{h,k \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}(Y_0 - X_0, kv - hw) =$

$= \mathrm{dist}(Y_0 - X_0, \langle v, w \rangle) = \| pr_{v \wedge w}(Y_0 - X_0) \| = \dfrac{|(Y_0 - X_0) \cdot v \wedge w|}{\| v \wedge w \|}$.

$v \wedge w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_0 - X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \mathrm{dist}(r, s) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

5. $P_{s_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \left((2\ -1\ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (2\ -1\ 1) = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathrm{dist}(Q, s) = \mathrm{dist}(Q - X_0, s_0) = \| Q - X_0 - P_{s_0}(Q - X_0) \| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|$

$= 2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{21}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare A^2.*
2. *(1 punto) Trovare un autovettore per A di autovalore 0.*
3. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
4. *(2 punti) Stabilire se A è ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.*
5. *(1 punto) Trovare una matrice non-nulla C tale che $A^{1000} C = 0_4$.*

Sol.: 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ v è un autovettore di autovalore 0.

3. $$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -1 & -2 & -1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= x \det \begin{pmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & -3 & -2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 \det \begin{pmatrix} x & -3 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 (x^2 - 3).$$

4. $A = A^t \underset{\text{spettrale}}{\overset{\text{Teo}}{\Longrightarrow}}$ A è ortogonalmente diagonalizzabile.

$$V_0(A) = \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

λ: $\lambda^2 = 3$.

$$V_\lambda(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\lambda^2=3}{=} \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\lambda \neq 0}{=} \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{6} & -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & \\ & & & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

5. $C = A^2 - 3\,\mathbb{1}_4$ per Cayley-Hamilton.

Esercizio 4. *Siano* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *e* $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$. *Consideriamo la funzione* $F : V \to W$ *data da*

$$F(p(x)) = p(x^2 + 1) - p(x - 1).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* F *è lineare.*
2. *(1 punto) Calcolare* $F(x^2 + x + 1)$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice associata ad* F *nelle basi standard.*
4. *(3 punti) Calcolare basi di nucleo ed immagine di* F.

<u>Sol.</u> : 1. $F = \mathrm{Val}_{x^2+1} - \mathrm{Val}_{x-1}$ quindi F è combinazione lineare di funzioni lineari.

2. $F(x^2+x+1) = (x^2+1)^2 + x^2+1+1 - (x-1)^2 - (x-1) - 1 = x^4 + 2x^2 + x + 2$

3. $$\begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$F(x) = x^2 + 1 - (x-1) = x^2 - x + 2$

$F(x^2) = (x^2+1)^2 - (x-1)^2$

$= x^4 + 2x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$= x^4 + x^2 + 2x$

4. $\mathrm{Ker}\, A = \langle e_1 \rangle \Rightarrow \mathrm{Ker}\, F = \langle 1 \rangle$

$\mathrm{Im}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Im}\, F = \langle 2 - x + x^2, 2x + x^2 + x^4 \rangle.$

Esercizio 5. *Si consideri la seguente funzione bilineare in tre variabili reali*

$$b(X,Y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

1. *(2 punti) Scrivere la matrice A associata a b nella base standard di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la segnatura di b.*
4. *(1 punto) Trovare una base di Sylvester associata a b.*
5. *(1 punto) Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ i tre autovalori della matrice A trovata al punto 1. Stabilire se $\lambda_1\lambda_3 \geq 0$.*

Sol.: 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Ker} b$. $F_1 = e_1 + e_2$, $F_1^2 = 2 > 0$.

$v_2 = e_2 \underset{G-S}{\Rightarrow} F_2 = v_2 - \frac{b(v_2, F_1)}{F_1^2} F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$. $F_2^2 = -2 < 0$.

Una base ortogonale è $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 - e_3\}$.

3. $\operatorname{sg} b = (1, 1)$.

4. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), e_1 - e_3 \right\}$.

5. $\lambda_1 < 0 = \lambda_2 < \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_3 < 0$.