Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Sia* M *il punto medio del segmento* $\overline{P_1P_2}$*. Calcolare* M*.*
2. *(1 punto) Sia* r *l'asse del segmento* $\overline{P_1P_2}$*. Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di* r*.*
3. *(2 punti) Trovare un punto* P_3 *dell'asse* r *che abbia coordinate intere positive e tale che il triangolo* $T = P_1\overset{\triangle}{P_2}P_3$ *di vertici* P_1, P_2, P_3 *abbia area uguale a* $\frac{15}{2}$*.*
4. *(2 punti) Scrivere il baricentro* B *di* T *come combinazione convessa di* M *e di* P_3*.*
5. *(2 punti) Ogni punto* P *del segmento* $\overline{MP_3}$ *divide il triangolo* T *in tre triangoli*
$$T_1 = P_3\overset{\triangle}{P}P_2, \quad T_2 = P_1\overset{\triangle}{P}P_3, \quad T_3 = P_1\overset{\triangle}{P}P_2 .$$
Dimostrare che $Area(T_1) = Area(T_2)$*. Sia* $t = \frac{Area(T_1)}{Area(T)} = \frac{Area(T_2)}{Area(T)}$ *e denotiamo il corrispondente punto* P *come* P_t*. Dimostrare che* $B = P_{1/3}$ *e disegnare il segmento* $S = \{P_t | t \in [0, 1/3]\}$*.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Sol.: 1) $M = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $r : (P_2 - P_1)\cdot X = M \cdot X \Rightarrow r : 3x + y = 10 \Rightarrow r = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$.

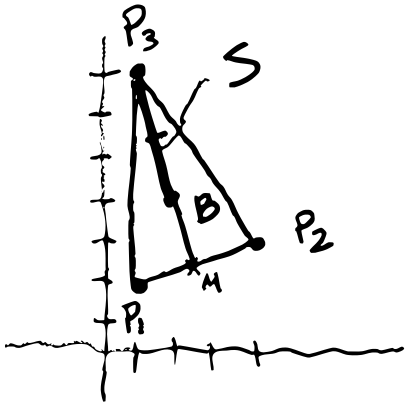
3) $P_3 \in r \Leftrightarrow P_3 = \begin{pmatrix} x \\ 10-3x \end{pmatrix}$. $\text{Area}(T) = \frac{1}{2}|\det(P_3 - P_1 | P_2 - P_1)|$

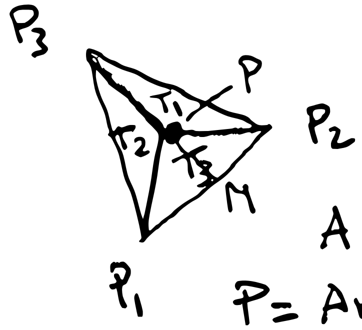
$\det(P_3 - P_1 | P_2 - P_1) = -5(2x-5)$. $\text{Area}(T) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = 4$ o $x = 1$

$\Leftrightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ o $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Il p.to richiesto è $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4) $B = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) + \frac{1}{3}P_3 = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

5)





$\text{Area}(T_1) = \frac{1}{2}|\overline{PP_3}||\overline{P_2M}| =$

$= \frac{1}{2}|\overline{PP_3}||\overline{P_1M}| = \text{Area}(T_2)$.

A lezione abbiamo visto che

$P = \frac{\text{Area}(T_1)}{\text{Area}(T)}P_1 + \frac{\text{Area}(T_2)}{\text{Area}(T)}P_2 + \frac{\text{Area}(T_3)}{\text{Area}(T)}P_3$

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = -1 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per* r_1 *ed una forma cartesiana per* r_2*.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
4. *(2 punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *contenente* r_2 *e parallelo ad* r_1*.*
5. *(1 punto) Si consideri la seguente famiglia di rette parallele ad* r_1 *dipendente dal parametro reale* k*:*

$$r_1(k) : \begin{cases} x - y + 3z = k \\ 2x - 3y + 4z = k \end{cases}$$

Trovare tutti i valori di k *per i quali* $r_1(k) \subset \pi$*.*

Sol.: 1) $r_1 : AX = b$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$, dove $X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$AX_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, $Av_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(Av_2 \mid b - AX_2) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ r_1 ed r_2 sono sghembe.

2) $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$ dove $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_1 = X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$Ker(v_2^t) = Ker(-1,1,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + z = 14 \end{cases}$

3) $dist(r_1, r_2) = \| pr_{v_1 \wedge v_2}(X_1 - X_2) \| = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

4) $\pi = X_2 + \langle v_2, v_1 \rangle$. Poiché $X_2 = v_1$, $\pi = \langle v_1, v_2 \rangle : v_1 \wedge v_2 \cdot X = 0$

$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi : x - 2y + z = 0$.

5) $r_1(k) = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} + \langle v_1 \rangle \subset \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$. Poiché

$\det\left(\begin{matrix} 2k \\ k \\ 0 \end{matrix} \middle| v_1 \middle| v_2 \right) = 0$, otteniamo che $r_1(k) \subset \pi$ $\forall k$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1) $P_A(X) = \det(X\mathbb{1}_4 - A) = \det\begin{pmatrix} X & -1 & -2 & 1 \\ 2 & X-3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & X-3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} X-2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & X-3 & -2 & 1 \\ X-2 & -1 & X-3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & X \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} X-2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & X-3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & X \end{pmatrix} = (X-2)(X-1)\det\begin{pmatrix} X-3 & 1 \\ -2 & X \end{pmatrix} = (X-2)(X-1)\det\begin{pmatrix} X-2 & 1 \\ 0 & X-1 \end{pmatrix}$

$= (X-2)^2(X-1)^2. \Rightarrow Sp(A) = \{1,2\} \subset \mathbb{R}.$

2) $ma_A(1) = 2$; $ma_A(2) = 2$.

3) $V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow mg_A(1) = 2 = ma_A(1)$

$V_2(A) = \operatorname{Ker}(2\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow mg_A(2) = 2 = ma_A(2)$

4) A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perché $Sp(A) \subset \mathbb{R}$ e $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(A)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base standard di V. Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = \{1+x, 1+2x, 1+x+x^2\}$.*

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V.*
2. *(1 punto) Sia $T : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*
$$T(1+x) = 1, \quad T(1+2x) = 2, \quad T(1+x+x^2) = 1+2x^2.$$
Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$ in partenza e nella base $\mathcal{C}$ in arrivo.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base $\mathcal{C}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per $\mathrm{Ker}(T)$.*
5. *(1 punto) Trovare una base per $\mathrm{Im}(T)$.*
6. *(1 punto) Calcolare dim$(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T))$ e dim$(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T))$.*

Sol.: 1) $\mathcal{B}$ è una base di $V \iff F_e(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché $\det(B) = 1$, concludiamo che $F_e(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "F_e"] \arrow[r, equal] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "T"] & V \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$C = AB^{-1}$. Calcoliamo B^{-1} con Cramer: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Otteniamo $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\mathrm{Ker}\, C = \langle e_1 \rangle \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \langle 1 \rangle$.

5) $\mathrm{Im}\, C = \langle e_1, e_3 \rangle \Rightarrow \mathrm{Im}\, T = \langle 1, x^2 \rangle$

6) $\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Im}\, T \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, T \cap \mathrm{Im}\, T) = \dim \mathrm{Ker}\, T = 1$

$\dim(\mathrm{Ker}\, T + \mathrm{Im}\, T) = \dim \mathrm{Im}\, T = 2.$

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su $Col(A)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale b' di b su $Col(A)$.*
4. *(1 punto) Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza di b da $Col(A)$.*

Sol.: 1) $rg(A|b) = rg \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3 \neq 2 = rg A \Rightarrow$ Il sistema $Ax=b$ non è risolubile.

2) $P = A(A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $b' = Pb = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

4) $(A|b') \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ L'unica soluzione di $Ax=b'$ è $x = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

5) $dist(b, Col A) = \|b - b'\| = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{\sqrt{6}}$