Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Quarto appello a.a. 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Data esame scritto: 16 settembre 2024

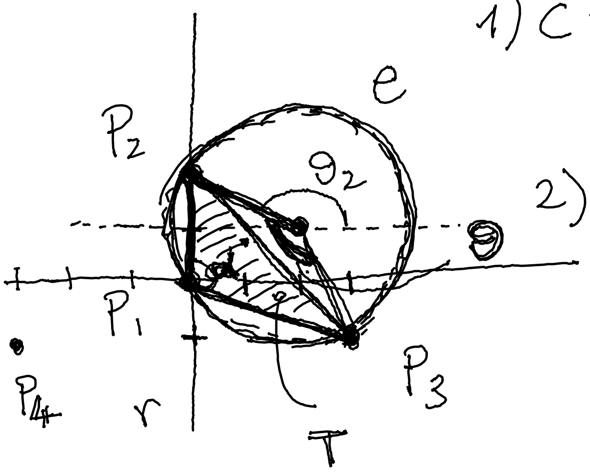
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *avente come vertici i tre punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Trovare il circoncentro* C *di* T.
2. *(2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *circoscritta a* T.
3. *(1 punti) Stabilire se il triangolo* T *è rettangolo, ottusangolo oppure acutangolo.*
4. *(1 punto) Trovare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_3 *attraverso la retta* r *passante per* P_1 *e* P_2.
5. *(1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tale che il punto* P_3 *è la rotazione del punto* P_2 *attorno a* C *in senso anti-orario dell'angolo* θ.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.



1) $C: \begin{cases} (P_2 - P_1) \cdot X = \dfrac{P_2^2 - P_1^2}{2} \\ (P_3 - P_1) \cdot X = \dfrac{P_3^2 - P_1^2}{2} \end{cases}$ $\quad C: \begin{cases} y = 1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\mathcal{C}: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ $\quad$ raggio $= \|C\| = \sqrt{5}$

$\mathcal{C} = \left\{ C + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

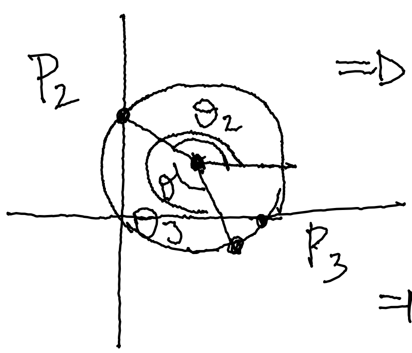
$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$

3) $(P_2 - P_1) \cdot (P_3 - P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \alpha$ è ottuso

$\Rightarrow T$ è ottusangolo.

4) r è l'asse delle ordinate ovvero $r: x = 0 \Rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5) $P_2 = C + r \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$, $\quad P_3 = C + r \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix}$. $\quad \theta = \theta_3 - \theta_2$



$\Rightarrow \cos\theta = \cos\theta_3 \cos\theta_2 + \sin\theta_3 \sin\theta_2$

$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{4}{5}$

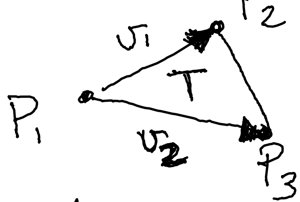
Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo i quattro punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}100\\2\\-20\end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Stabilire se i tre punti P_1, P_2 e P_3 sono allineati.*
2. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3.*
3. *(2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contiene i tre punti P_1, P_2 e P_3. Denotarlo con π.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto Q da π.*
5. *(1 punto) Calcolare il volume della piramide di vertici P_1, P_2, P_3 e Q.*

Soluzione Esercizio 2.

1) $v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono lin. ind. $\Rightarrow$ I punti non sono allineati.



2) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| v_1 \wedge v_2 \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}$

3) $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle : \quad y = 1$

4) $\text{dist}(Q, \pi) = 1$

5) $\frac{1}{3} \text{Area}(T) \, \text{dist}(Q, \pi) = \frac{1}{6}$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Determinare lo spettro di A.*
4. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la formula di Cramer.*

Soluzione Esercizio 3.

1) $\det A = -2$

2) $$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -2 & 1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1) \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & x-2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ -2 & x+1 \end{pmatrix} = (x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2)$$

$$= x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

3) $$P_A(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2\mathbb{1}_3 \overset{C-H}{=} 0_{3\times 3} \Rightarrow A(A^2 - 2A - \mathbb{1}_3) = -2\mathbb{1}_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - \mathbb{1}_3) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $Sp(A) = \{1, -1, 2\}$. 6) A è 3×3 ed ha 3 autovalori reali e distinti. Quindi A è digonalizzabile su $\mathbb{R}$. $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. *Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili $x_1, \cdots, x_5$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 + (k+4)x_4 + (k+2)x_5 = 6k+1 \\ kx_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2k \\ 2x_1 - kx_2 - (k+1)x_3 + (2-k)x_4 + (1-k)x_5 = 3k-1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 4.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & K & K+1 & K+4 & K+2 & 6K+1 \\ 0 & K & K+1 & 3 & 2 & 2K \\ 2 & -K & -(K+1) & 2-K & 1-K & 3K-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & K & K+1 & K+4 & K+2 & 6K+1 \\ 0 & K & K+1 & 3 & 2 & 2K \\ 0 & -3K & -3(K+1) & -3K-6 & -3K-3 & 3K-1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & K+1 & K & 4K+1 \\ 0 & K & K+1 & 3 & 2 & 2K \\ 0 & 0 & 0 & -3K+3 & -3K+3 & -3K-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & K+1 & K & 4K+1 \\ 0 & K & K+1 & 3 & 2 & 2K \\ 0 & 0 & 0 & K-1 & K-1 & K+1 \end{array}\right)$$

Se $K=0$ otteniamo $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Se $K=1$ otteniamo $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Se $K \neq 0$ e $K \neq 1$ otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & K+1 & K & 4K+1 \\ 0 & 1 & \frac{K+1}{K} & \frac{3}{K} & \frac{2}{K} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{K+1}{K-1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{3K^2-5K-2}{K-1} \\ 0 & 1 & \frac{K+1}{K} & 0 & -\frac{1}{K} & \frac{2K^2-5K-3}{K(K-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{K+1}{K-1} \end{array}\right)$$

Il sistema è risolubile se e solo se $K \neq 1$.

Se $K=0$ le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Se $K \neq 1$ e $K \neq 0$ le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} \frac{3K^2-5K-2}{K-1} \\ \frac{2K^2-5K-3}{K(K-1)} \\ 0 \\ \frac{K+1}{K-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{K+1}{K} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{K} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente insieme ordinato di vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0 \end{pmatrix} \right)$$

ed il vettore $P = \begin{pmatrix} 1\\2\\-3\\2 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$.
2. *(2 punti) Utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt su* $\mathcal{B}$ *per trovare una base ortogonale* $\mathcal{C} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ *di* $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ *tale che* $\langle v_1, \cdots, v_i \rangle = \langle F_1, \cdots, F_i \rangle$ *per ogni* $i = 1, \cdots, 4$.
3. *(1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di* $\langle v_1, v_2 \rangle$.
4. *(1 punto) Calcolare le coordinate di* P *nella base* $\mathcal{C}$.
5. *(1 punti) Trovare il più grande indice* j *tale che* $P \notin \langle v_1, \cdots, v_j \rangle$.
6. *(1 punto) Denotare con* U *il sottospazio* $U = \langle v_1, \cdots, v_j \rangle$ *trovato al punto precedente. Calcolare la distanza di* P *da* U.

Soluzione Esercizio 5.

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è lin. Ind. $\xRightarrow[|\mathcal{B}| = 4 = \dim \mathbb{R}^4]{}$ $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

2) $F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$, $F_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}$, $F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$

Scegliamo $F_3 = \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$. $F_4' = v_4 - \frac{v_4 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_4 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 - \frac{v_4 \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$

Scegliamo $F_4 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$.

3) $\langle v_1, v_2 \rangle : \begin{cases} F_3 \cdot X = 0 \\ F_4 \cdot X = 0 \end{cases}$ $\langle v_1, v_2 \rangle : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ -X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$

4) $P = \frac{P \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{P \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \frac{P \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 + \frac{P \cdot F_4}{F_4 \cdot F_4} F_4 = \frac{1}{2} F_1 - \frac{3}{2} F_2 + 2 F_3 \Rightarrow F_e(P) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $P \in \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$, $P \notin \langle F_1, F_2 \rangle \Rightarrow j = 2$. 6) $pr_U(P) = \frac{1}{2} F_1 - \frac{3}{2} F_2$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(P, U) = \| P - pr_U P \| = \| 2 F_3 \| = 2 \| F_3 \| = 2\sqrt{2}$.