

Nome, Cognome e Matricola

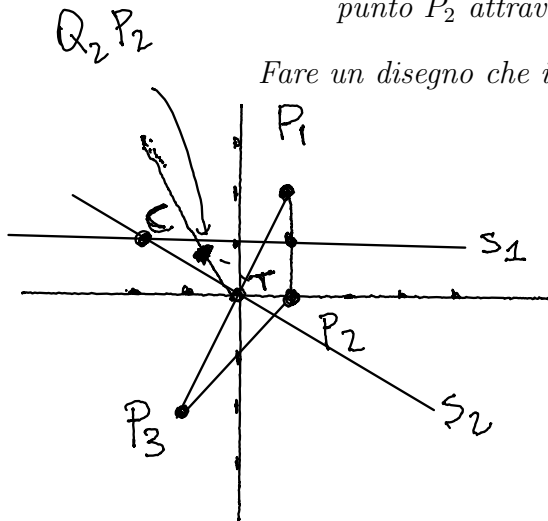
---

Esame scritto di Geometria  
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio  
Terzo appello aa: 2023/24  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

17 giugno 2024

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- (2 punti) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo  $T$  di vertici  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .
- (2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse  $s_1$  del segmento  $\overline{P_1P_2}$  e dell'asse  $s_2$  del segmento  $\overline{P_1P_3}$ .
- (1 punto) Calcolare il circocentro  $\mathcal{C}$  del triangolo  $T$ .
- (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza  $\mathcal{C}$  circoscritta al triangolo  $T$ .
- (1 punto) Trovare il punto  $P_4$  ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto  $P_2$  attraverso la retta passante per  $P_1$  e  $P_3$ .



Fare un disegno che illustri la situazione.

$$1) \text{ Area}(T) = \frac{1}{2} |\det(P_1 - P_3 | P_2 - P_3)| = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}|$$

$$= \frac{4}{2} |\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}| = 2$$

$$\|\overrightarrow{P_3P_1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{5}; \quad \|\overrightarrow{P_3P_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{P_2P_1}\| = 2 \quad \text{Perimetro} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2.$$

$$2) s_1: \overrightarrow{P_2P_1} \cdot X = \overrightarrow{P_2P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{2} \quad \text{ovvero} \quad s_1: y = 1$$

$$s_2: \overrightarrow{P_3P_1} \cdot X = 0 \quad \text{ovvero} \quad s_2: x + 2y = 0$$

$$3) \mathcal{C} = s_1 \cap s_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \text{ raggio} = \|\overrightarrow{CP_1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10} = \|\overrightarrow{CP_2}\| = \|\overrightarrow{CP_3}\| = r$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathcal{C} + r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}; \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$5) \text{ La pendenza di } \overrightarrow{P_3P_1} \text{ è } m=2. \quad Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}.$$

$$P_4 = Q_2 P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. (1 punto) Calcolare  $v_1 \wedge v_2$ .
2. (1 punto) Calcolare la distanza di  $P$  dal piano  $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$ .
3. (1 punto) Consideriamo il piano affine  $\pi = P + \pi_0$  e la retta affine  $r = (P - v_1) + \langle v_1 + v_2 \rangle$ . Stabilire la posizione reciproca di  $r$  e  $\pi$  senza cambiare la loro forma.
4. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane di  $\pi$ .
5. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta  $s$  passante per i punti  $P$  e  $Q = v_1 + v_2$ .
6. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P$  su  $\pi_0$ .

Sol.: 1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2)  $\text{dist}(P, \pi_0) = \|\text{pr}_{v_1, v_2}(P)\| = \frac{|P \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{|1 - 6 + 3|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{1}{7} \sqrt{14}$

3)  $r = \{ P - v_1 + t(v_1 + v_2) \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ P + (t-1)v_1 + tv_2 \mid t \in \mathbb{R} \} \subset P + \pi_0$ .

4)  $\pi: v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P$  ovvero  $\pi: x - 2y + 3z = -2$

5)  $s = P + \langle Q - P \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle : \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$

6) Cerchiamo una base ortogonale di  $\pi_0$ :

$$F_1 = v_1, \quad F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \sim F_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{pr}_{\pi_0}(P) = \frac{P \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{P \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{8}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 24 \\ 57 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix}$$

"coefficienti  
di Fourier"

**Esercizio 3.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il determinante di  $A$ .
2. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .
3. (1 punto) Stabilire se  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  è un autovettore per  $A$ .
4. (1 punto) Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .
5. (1 punto) Calcolare  $A^{-1}$  con il teorema di Cayley-Hamilton.
6. Calcolare  $A^3$ .
7. Nello spazio vettoriale delle matrici  $3 \times 3$  a coefficienti reali, si consideri il sottospazio vettoriale  $U = \text{Span}(\mathbb{1}_3, A, A^2, A^3, \dots, A^{100})$ . Trovare una base di  $U$ .

Sol.: 1)  $\det A = -2$ . 2)  $A$  è la matrice compagna del polinomio  $x^3 - 3x + 2$ . Per cui,  $P_A(x) = x^3 - 3x + 2$ .

3)  $A^3 = A^3 - 2A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2v \Rightarrow v$  è autovettore di autovalore  $-2$ .

4) Dal punto 3 sappiamo che  $P_A(-2) = 0$ .

$$x^3 - 3x + 2 \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x^2 - 2x + 1 \end{array} \right. \Rightarrow P_A(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1) = (x+2)(x-1)^2$$

$$4) \begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \\ x^3 + 2x^2 \\ \hline -2x^2 - 3x + 2 \\ -2x^2 - 4x \\ \hline x + 2 \end{array}$$

$$V_1(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow m_A(1) = 1 < 2 = n_A(1) \Rightarrow A$  non è diagonalizzabile.

5)  $A^3 - 3A + 2\mathbb{1}_3 = 0_3 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 3\mathbb{1}_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6)  $A^3 = 3A - 2\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$  7) Una base di  $U$  è  $(\mathbb{1}_3, A, A^2)$ .

**Esercizio 4.** Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare  $f \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
2. (1 punto) Dimostrare che  $f$  è lineare.
3. (1 punto) Trovare la matrice  $A$  associata ad  $f$  nelle basi standard.
4. (1 punto) Sia  $\mathcal{B} = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Dimostrare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
5. (1 punto) Sia  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'unica funzione lineare tale che

$$\begin{aligned} g(e_1) &= v_1 + v_2 - v_3 \\ g(e_2) &= 2v_1 - 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Calcolare la matrice  $C$  associata a  $g$  nella base standard di  $\mathbb{R}^2$  e nella base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

6. (1 punto) Calcolare la matrice  $D$  associata a  $f \circ g$  nella base standard di  $\mathbb{R}^2$ .
7. (1 punto) Se  $D$  è invertibile calcolare  $D^{-1}$ , altrimenti calcolare una base del suo nucleo.

Sol. : 1)  $f \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 - 2(-1) - 1 \\ -4 + 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2)  $f(x) = Ax$  dove  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Quindi  $f = S_A$ . Poiché  $S_A$  è lineare anche  $f$  lo è.

3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . 4)  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$  è lin. ind.

$\Rightarrow$   $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ . 5)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6)  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow f_C & \parallel & \downarrow f_B & & \downarrow f_E & & \downarrow f_A \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$D = ABC$  dove  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$  6)  $D^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

**Esercizio 5.** Consideriamo il seguente piano di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

1. (4 punti) Calcolare la matrice  $P_U$  di proiezione ortogonale su  $U$ .

2. (3 punti) Calcolare la distanza del vettore  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  da  $U$ .

Sol.:  $U = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_U = A (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_U v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{dist}(v, U) = \|v - P_U v\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2}.$$