Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo* $v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Calcolare il coseno dell'angolo compreso tra* v_1 *e* v_2 *e stabilire se è acuto o ottuso.*
2. *(2 punti) Trovare i punti* A, B *e* C *tali che*

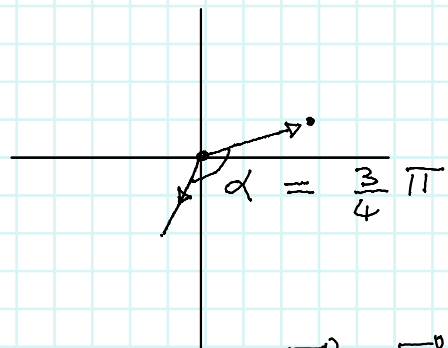
$$\vec{OA} = -2v_1, \quad \vec{OB} = \tfrac{3}{2}v_2, \quad \vec{OC} = -2v_1 + \tfrac{3}{2}v_2.$$

3. *(1 punto) Calcolare l'area del quadrilatero* $\mathcal{P}$ *di vertici* O, A, B *e* C.
4. *(1 punto) Trovare il punto* C' *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* C *attraverso la retta* r *passante per* A *e* B.
5. *(1 punto) Trovare il punto* D *con le seguenti proprietà: 1) il triangolo* ADB *abbia area uguale all'area del triangolo* ACB*, 2) il triangolo* ADB *sia isoscele con base* $\overline{AB}$*, 3)* D *abbia coordinate positive.*

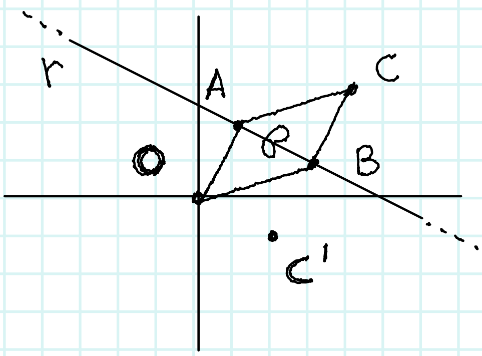
Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

1) $\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = -\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



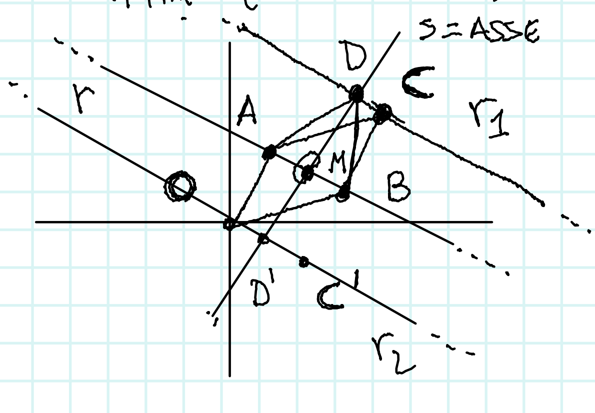
3) $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{OA}, \vec{OB})$ poiché $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

$\Rightarrow$ Area $\mathcal{P} = |\det(A|B)| = |-5| = 5$

4) $C' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Infatti, $r: x + 2y = 5$ ha pendenza $m = -\frac{1}{2}$. e

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \overset{m=-\frac{1}{2}}{=} \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 3/4 & -1 \\ -1 & -3/4 \end{pmatrix}. \quad C' = A + Q_{-\frac{1}{2}}(C - A)$$

5)



Il luogo dei punti X t.c. Area(AXB) = Area(ACB) è dato dalle due rette r_1 ed r_2 parallele a r e distanti da r quanto C. $D \in$ asse s di $\overline{AB}$.

$r_1: x + 2y = 10$, $r_2: x + 2y = 0$, $s: 2x - y = 5/2$

$r_1 \cap s = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \end{pmatrix}$, $r_2 \cap s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = r_1 \cap s = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo*

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano* $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* $r = P + \langle v_1 \rangle$.
4. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale* $pr_{v_1}(\overrightarrow{PQ})$ *del vettore* $\overrightarrow{PQ}$ *sul vettore* v_1.
5. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* Q *dalla retta* r.
6. *(1 punto) Calcolare la lunghezza dell'angolo acuto compreso tra* v_1 *e* v_2.
7. *(1 punto) Dati due vettori* $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ *linearmente indipendenti dimostrare che l'angolo compreso tra i vettori* w_2 *e* $w_1 \wedge (w_1 \wedge w_2)$ *è ottuso.*

Soluzione Esercizio 2.

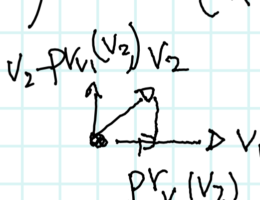
1) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

2) $\pi : v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P$ ovvero $\pi : x - y - z = 1$

3) $v_1^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow r : \begin{cases} -2x + y = -7 \\ x + z = 6 \end{cases}$

4) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = v_2.$ $\quad pr_{v_1}(v_2) = \dfrac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

5) $\mathrm{dist}(Q, r) = \mathrm{dist}(Q - P, \langle v_1 \rangle) = \mathrm{dist}(v_2, \langle v_1 \rangle) = \| v_2 - pr_{v_1}(v_2) \|$



$= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

6) $\cos \widehat{v_1 v_2} = \dfrac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} = \dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{v_1 v_2} = \dfrac{\pi}{6}$ $(30°)$.

7) $w_2 \cdot w_1 \wedge (w_1 \wedge w_2) = w_1 \wedge (w_1 \wedge w_2) \cdot w_2 = \det(w_1 | w_1 \wedge w_2 | w_2)$

$= -\det(w_1 | w_2 | w_1 \wedge w_2) = -(w_1 \wedge w_2) \cdot (w_1 \wedge w_2)$

$= -\|w_1 \wedge w_2\|^2 < 0.$ (Non è zero perché w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti).

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(1 punto) Calcolare una base di $Col(A)$ ed il rango di A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di A.*
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
6. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
7. *(1 punto) Sia $n \geq 2$ e sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice $n \times n$ avente rango uguale a 1 e traccia diversa da zero. Dimostrare che $Sp(A) = \{Tr(A), 0\}$ e che A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.*

Soluzione Esercizio 3.

1) $\mathrm{Tr}A = 1+4+3 = 8$. 2) $\mathcal{B}_{ColA} = \left(A^1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$. Infatti $A^2 = 2A^1$, $A^3 = A^1$.

3) $\mathrm{Ker}\,A = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}A} = \left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$.

4) $$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ -2 & x-4 & -2 \\ -3 & -6 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -2 & -1 \\ 0 & x-4 & -2 \\ -x & -6 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -2 & -1 \\ 0 & x-4 & -2 \\ 0 & -8 & x-4 \end{pmatrix}$$
$$= x \det\begin{pmatrix} x-4 & -2 \\ -8 & x-4 \end{pmatrix} = x\left[(x-4)^2 - 16\right] = x^2(x-8)$$

5) $Sp(A) = \{0, 8 = \mathrm{Tr}A\}$. 6) $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

7) Consideriamo una base $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}A} = (v_2, \dots, v_n)$ di $\mathrm{Ker}A$ e una base di $ColA$. Estendiamo $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}A}$ ad una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di $\mathbb{K}^n$. Scriviamo w in $\mathcal{B}$: $w = s_1 v_1 + \dots + s_n v_n$. Poiché $\langle w \rangle = ColA$, $\exists s \in \mathbb{K}$ t.c. $Av_1 = sw_1 = ss_1 v_1 + \dots + ss_n v_n$. La matrice associata a A in $\mathcal{B}$ è
$C = (F_{\mathcal{B}}(Av_1)| \dots |F_{\mathcal{B}}(Av_n)) = \begin{pmatrix} ss_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ss_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. A e C sono coniugate $\Rightarrow \mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}C = ss_1$
$\Rightarrow ss_1 \neq 0 \Rightarrow Aw = s_1 Av_1 = ssw \Rightarrow w$ è autovettore di autovalore $\mathrm{Tr}A \neq 0$
$\Rightarrow w \notin \mathrm{Ker}A \Rightarrow (w, v_2, \dots, v_n)$ è una base di $\mathbb{K}^n$ composta di autovettori per $A \Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.

Esercizio 4. *Come al solito denotiamo con $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di n, a coefficienti reali.*

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ data da

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(x+1) - p(x-1).$$

1. *(1 punto) Calcolare $f(1-x)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che f è lineare.*
3. *(1 punto) Dimostrare che f è iniettiva.*
4. *(1 punto) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} = (f(1), f(x), x^2)$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.*
5. *(1 punto) Sia $g : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ l'unica funzione lineare tale che*

$$g(f(1)) = 1-x, \quad g(f(x)) = 1+2x, \quad g(x^2) = 2-3x.$$

Calcolare la matrice C associata a g nella base $\mathcal{B}$ e nella base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

6. *(1 punto) Calcolare la matrice D associata a $g \circ f$ nella base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.*
7. *(1 punto) Se D è invertibile calcolare la sua inversa, altrimenti calcolare una base del suo nucleo.*

Soluzione Esercizio 4.

1) $f(1-x) = (x+1)(1-(x-1)) + (1-(x+1)) - (1-(x-1)) = x - x^2$

2) $f = \mathrm{Molt}_{(x+1)} \circ \mathrm{Val}_{(x-1)} + \mathrm{Val}_{(x+1)} - \mathrm{Val}_{(x-1)} \Rightarrow f$ è combinazione lineare di funzioni lineari e quindi f è lineare.

3) $f(a+bx) = (a+b) + ax + bx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \iff a = b = 0$.
Quindi $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}[x]_{\leq 1}}\}$.

4) $\mathcal{B} = (f(1) = 1+x, f(x) = 1+x^2, x^2)$. Poiché $1+x^2 \notin \langle 1+x \rangle$ e $x^2 \notin \langle 1+x, 1+x^2 \rangle$ dal lemma di indipendenza lineare segue che $\mathcal{B}$ è lin. ind.. Poiché $|\mathcal{B}| = 3 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e quindi è una base.

5) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

6) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\det D = 3 \neq 0 \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *Consideriamo le seguenti matrici reali:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare una base di $Col(A)$.*
2. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ è risolubile.*
3. *(3 punti) Calcolare la proiezione ortogonale $c = pr_{Col(A)}(b)$ di b su $Col(A)$.*
4. *(2 punti) Risolvere il sistema $Ax = c$.*

Soluzione Esercizio 5.

1) Le due colonne di A sono lin. ind. perché $A^2 \notin \langle A^1 \rangle$.
$\mathcal{B}_{ColA} = (A^1, A^2)$.

2) $$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 14 \\ 0 & -5 & -28 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -14 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 14 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-35} \\ 0 & 0 & 42 \end{array}\right) \; !!$$

$\Rightarrow$ Il sistema $Ax = b$ non è risolubile.

3) $$pr_{ColA}(b) = A(A^tA)^{-1}A^t b$$
$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = c$$

4) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'unica soluzione di $Ax = c$ è $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.