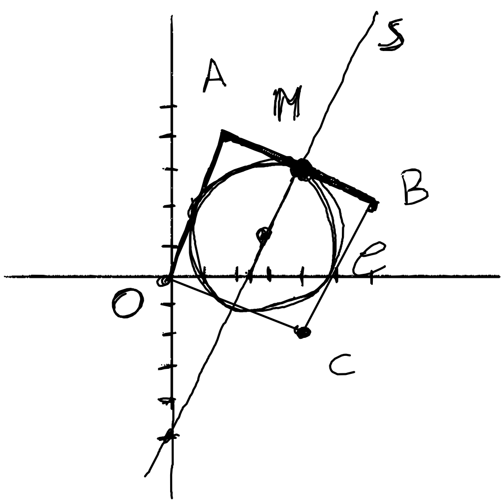
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ *consideriamo i punti* $A=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ *e* $B=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{AB}$.
2. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse* s *del segmento* $\overline{AB}$.
3. *(1 punto) Calcolare il punto* C *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine* O *attraverso l'asse* s.
4. *(2 punti) Stabilire se il quadrilatero* $ABCO$ *è un quadrato.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrilatero* $ABCO$.
6. *(1 punto) Scrivere la matrice* R_θ *di rotazione in senso anti-orario di un angolo* θ.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $M=\frac{1}{2}(A+B)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

2) $s: \vec{AB}\cdot X=\vec{AB}\cdot M$. $\vec{AB}=B-A=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

$s: 4x-2y=10$ ovvero $s: 2x-y=5$

3) $m=2$. $Q_m=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$. $Q_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$C=M+Q_2(-M)=M-Q_2M=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

4) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\vec{OC}\Rightarrow$ è un parallelogramma

$|\overline{AB}|=\left\|\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\|=|\overline{OA}|\Rightarrow$ è un rombo.

$\vec{AB}\cdot\vec{AO}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}=0\Rightarrow$ è un quadrato.

5) centro $=\frac{1}{2}\vec{OB}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. raggio $=\frac{1}{2}|\overline{OA}|=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$

$\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{20}}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\;\middle|\;\theta\in[0,2\pi)\right\}$: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$

6) $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *(1 punto) Trovare l'equazione equazione cartesiana del piano* $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* v_1, v_2 *e* $v_1 + v_2$.
6. *(2 punti) Date due rette* $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *ed* $s = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *parametriche di* $\mathbb{R}^3$*, scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di* r *ed* s *e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.*

Sol.: 1) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$

2) $\pi : v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P_1$. $\pi : 4x - y - 3z = -9$

3) $\det(v_1 | -v_2 | P_2 - P_1) = -\det(v_1 | v_2 | P_2 - P_1) = -v_1 \wedge v_2 \cdot (P_2 - P_1) = -\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = -7 \neq 0$

$\Rightarrow$ sono sghembe.

4) $\mathrm{dist}(r_1, r_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sghembe}}}{=} \mathrm{dist}(P_2 - P_1, \langle v_1, v_2 \rangle) = \dfrac{|v_1 \wedge v_2 \cdot (P_2 - P_1)|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \dfrac{7}{\sqrt{26}}$

5) $\mathrm{Area}(T) = \frac{1}{2} \| (v_1 + v_2 - v_1) \wedge (v_1 + v_2 - v_2) \| = \frac{1}{2} \| v_2 \wedge v_1 \| = \frac{1}{2} \| v_1 \wedge v_2 \| = \frac{\sqrt{26}}{2}$

6) $r \cap s \neq \emptyset \iff \exists\, s, t : s v_1 - t v_2 = P_2 - P_1 \underset{\text{Rouché-Capelli}}{\iff} \mathrm{rg}(v_1 | -v_2) = \mathrm{rg}(v_1 | -v_2 | P_2 - P_1)$

$r \parallel s \iff \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \iff \mathrm{rg}(v_1 | v_2) = 1 \iff \mathrm{rg}(v_1 | -v_2) = 1$

	$\mathrm{rg}(v_1 \| -v_2)$	$\mathrm{rg}(v_1\ v_2 \| P_2 - P_1)$
$r \equiv s$	1	1
$r \parallel s$, $r \neq s$	1	2
$r \cap s = \{P_0\}$	2	2
sghembe	2	3

$P_0 = P_1 + s_0 v_1 = P_2 + t_0 v_2$
dove $\begin{pmatrix}s_0\\t_0\end{pmatrix}$ è l'unica soluzione di $(v_1 | -v_2) X = P_2 - P_1$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 9 & -15 \\ 4 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Trovare una base di $ker(A)$.*
2. *(1 punto) Trovare una base di $Col(A)$ e calcolare il rango di A.*
3. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
4. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
6. *(1 punto) Enunciare la formula della dimensione per un'applicazione lineare $f : V \to W$.*

Sol.: $A = (2v \mid 3v \mid -5v)$ dove $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quindi $A = v(2,3,-5) = vw^t$ con $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} vw^t \underset{\uparrow}{=} \operatorname{Ker} w^t = \langle w \rangle^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Teo: $\operatorname{Ker} A^t A = \operatorname{Ker} A$

2) $\operatorname{Col} A = \langle v \rangle$. $\mathcal{B}_{\operatorname{Col} A} = (v)$.

3) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -3 & 5 \\ -6 & x-9 & 15 \\ -4 & -6 & x+10 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-5 & -3 & 5 \\ x-15 & x-9 & 15 \\ -10 & -6 & x+10 \end{pmatrix}$

$= \det \begin{pmatrix} x & -3 & 5 \\ x & x-9 & 15 \\ x & -6 & x+10 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -3 & 5 \\ 0 & x-6 & 10 \\ 0 & -3 & x+5 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x-6 & 10 \\ -3 & x+5 \end{pmatrix} = x \det$

$= x \det \begin{pmatrix} x & -2x \\ -3 & x+5 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ -3 & x-1 \end{pmatrix} = x^2(x-1)$.

Alternativamente: $Av = vw^tv = w \cdot v\, v = v \Rightarrow \operatorname{Col} A = V_1(A) \Rightarrow Sp(A) = \{0,1\}$

$\Rightarrow P_A(x) = x^2(x-1)$

4) Lo è. $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $D = \operatorname{diag}(0,0,1)$

5) Poiché $A = B\,D\,B^{-1}$ e $D^n = D\ \forall n$, $A^n = BD^nB^{-1} = B.DB^{-1} = A \quad \forall n \geq 1$.

6) $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Esercizio 4. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. *Consideriamo la funzione* $f : V \to V$ *data da*

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(1) + p'(x^2-1) - xp(x)$$

1. *(1 punto) Calcolare* $f(2-3x+4x^2)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata ad* f *nella base standard di* V.
4. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Ker(f)}$ *del nucleo di* f.
5. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Im(f)}$ *dell'immagine di* f.
6. *(1 punto) Calcolare la matrice* C *associata ad* f *nella base* $\mathcal{B} = (1+x, 1+2x, -x+x^2)$ *di* V *(sia in partenza che in arrivo).*
7. *(1 punto) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare* $f : V \to W$ *è un sottospazio vettoriale di* V.

Sol.: 1) $f(2-3x+4x^2) = 1-4x+4x^2$

2) $f = m_{x+1} \circ Val_{x-1} + Val_1 + Val_{x^2-1} \circ D - m_x$. f è quindi una combinazione lineare di composizioni di funzioni lineari. Per quanto visto a lezione, f è lineare.

3) $f(1) = 2$
$f(x) = 1$
$f(x^2) = -x+x^2$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \langle 1-2x \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (1-2x)$

5) $\operatorname{Col} A = \langle A^1, A^3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle 2, -x+x^2 \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = (1, -x+x^2)$

6) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} \underset{\text{Cramer}}{=} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\quad f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = 0_W$
$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \operatorname{Ker} f$.
Inoltre, $f(0_V) = 0_W$ e quindi $0_V \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *e la matrice* $A = vv^t$.

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di* A.
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_v *di proiezione ortogonale sulla retta generata da* v *e la distanza del punto* $Q = (8, 4, -4, 4)^t$ *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.

Sol.: 1) $A = (v|-v|-v|v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $Col A = \langle v \rangle$. $\mathcal{B}_{Col(A)} = (v)$. $rg A = 1$

3) $Ker A = (Col A^t)^\perp \underset{\substack{\uparrow \\ A=A^t}}{=} Col A^\perp = \langle v \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) $A = A^t \underset{\text{Teorema spettrale}}{\Longrightarrow}$ A è ortogonalmente diagonalizzabile.

5) $Av = v \cdot v\, v = 4v \Rightarrow Sp(A) = \{0, 4\}$.

6) $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1$

$F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} F_2$

$F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} F_3$

$B = (E_1 | E_2 | E_3 | \frac{1}{2} v)$. $D = diag(0, 0, 0, 4)$

7) $P_v = v(v^t v)^{-1} v^t = \frac{1}{4} A$. $dist(Q, \pi) = \| P_v Q \| = \left\| A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|$

$= 3 \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 6$