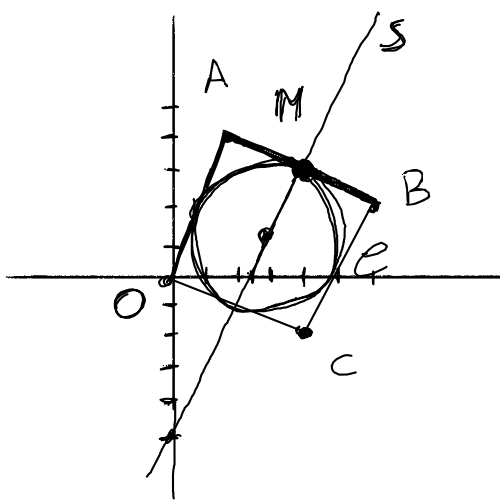


Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (1 punto) Calcolare il punto medio M del segmento \overline{AB} .
- (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse s del segmento \overline{AB} .
- (1 punto) Calcolare il punto C ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine O attraverso l'asse s .
- (2 punti) Stabilire se il quadrilatero $ABCO$ è un quadrato.
- (2 punti) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza C inscritta nel quadrilatero $ABCO$.
- (1 punto) Scrivere la matrice R_θ di rotazione in senso anti-orario di un angolo θ .

Fare un disegno che illustri la situazione.



$$1) M = \frac{1}{2}(A+B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2) s: \overrightarrow{AB} \cdot X = \overrightarrow{AB} \cdot M. \quad \overrightarrow{AB} = B-A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$s: 4x - 2y = 10 \quad \text{ovvero} \quad s: 2x - y = 5$$

$$3) m = 2. \quad Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}. \quad Q_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = M + Q_2(-M) = M - Q_2 M = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$4) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \bar{e} \text{ un parallelogramma}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = |\overrightarrow{OA}| \Rightarrow \bar{e} \text{ un rombo.}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{e} \text{ un quadrato.}$$

$$5) \text{centro} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{raggio} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{20}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\} : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$6) R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

- (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
- (1 punto) Trovare l'equazione equazione cartesiana del piano $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$.
- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
- (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
- (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici v_1 , v_2 e $v_1 + v_2$.
- (2 punti) Date due rette $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $s = P_2 + \langle v_2 \rangle$ parametriche di \mathbb{R}^3 , scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di r ed s e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.

Sol. : 1) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) $\pi: v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P_1$. $\pi: 4x - y - 3z = -9$

3) $\det(v_1 | v_2 | P_2 - P_1) = -\det(v_1 | v_2 | P_2 - P_1) = -v_1 \wedge v_2 \cdot (P_2 - P_1) = -\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -7 \neq 0$
 \Rightarrow sono sghembe.

4) $\text{dist}(r_1, r_2) \underset{\text{sghembe}}{=} \text{dist}(P_2 - P_1, \langle v_1, v_2 \rangle) = \frac{|v_1 \wedge v_2 \cdot (P_2 - P_1)|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{7}{\sqrt{26}}$

5) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \|(v_1 + v_2 - v_1) \wedge (v_1 + v_2 - v_2)\| = \frac{1}{2} \|v_2 \wedge v_1\| = \frac{1}{2} \|v_1 \wedge v_2\| = \frac{\sqrt{26}}{2}$

6) $r \cap s \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists s, t: s v_1 - t v_2 = P_2 - P_1 \stackrel{\text{Rouché-Capelli}}{\Leftrightarrow} \text{rg}(v_1 | -v_2) = \text{rg}(v_1 | -v_2 | P_2 - P_1)$
 $r \parallel s \Leftrightarrow \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \Leftrightarrow \text{rg}(v_1 | v_2) = 1 \Leftrightarrow \text{rg}(v_1 | -v_2) = 1$

	$\text{rg}(v_1 -v_2)$	$\text{rg}(v_1 v_2 P_2 - P_1)$
$r \equiv s$	1	1
$r \parallel s, r \neq s$	1	2
$r \cap s = \{P_0\}$	2	2
sghembe	2	3

$P_0 = P_1 + s_0 v_1 = P_2 + t_0 v_2$
dove $\begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è l'unica soluzione di $(v_1 | -v_2)X = P_2 - P_1$

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 9 & -15 \\ 4 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Trovare una base di $\ker(A)$.
2. (1 punto) Trovare una base di $\text{Col}(A)$ e calcolare il rango di A .
3. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
4. (2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
5. (1 punto) Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.
6. (1 punto) Enunciare la formula della dimensione per un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$.

Sol.: $A = (2v | 3v | -5v)$ dove $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quindi $A = v(2, 3, -5) = vw^t$
con $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$1) \ker A = \ker vw^t = \ker w^t = \langle w \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \mathcal{B}_{\ker A} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Traccia: } \ker A^t A = \ker A$$

$$2) \text{Col} A = \langle v \rangle. \quad \mathcal{B}_{\text{Col} A} = (v).$$

$$3) P_A(x) = \det(xI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -3 & 5 \\ -6 & x-9 & 15 \\ -4 & -6 & x+10 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-5 & -3 & 5 \\ x-15 & x-9 & 15 \\ -10 & -6 & x+10 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -3 & 5 \\ x & x-9 & 15 \\ x & -6 & x+10 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -3 & 5 \\ 0 & x-6 & 10 \\ 0 & -3 & x+5 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x-6 & 10 \\ -3 & x+5 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & -2x \\ -3 & x+5 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ -3 & x-1 \end{pmatrix} = x^2(x-1).$$

Alternativamente: $Av = vw^tv = w \cdot v \cdot v = v \Rightarrow \text{Col} A = V_1(A) \Rightarrow \text{Sp}(A) = \{0, 1\}$

$$\Rightarrow P_A(x) = x^2(x-1)$$

$$4) \text{Lo } \bar{e}. \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad D = \text{diag}(0, 0, 1)$$

$$5) \text{Poich\`e } A = B D B^{-1} \text{ e } D^n = D \quad \forall n, \quad A^n = B D^n B^{-1} = B D B^{-1} = A \quad \forall n \geq 1.$$

$$6) \dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim V.$$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo la funzione $f: V \rightarrow V$ data da

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(1) + p'(x^2-1) - xp(x)$$

1. (1 punto) Calcolare $f(2 - 3x + 4x^2)$.
2. (1 punto) Dimostrare che f è lineare.
3. (1 punto) Calcolare la matrice A associata ad f nella base standard di V .
4. (1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f)}$ del nucleo di f .
5. (1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f)}$ dell'immagine di f .
6. (1 punto) Calcolare la matrice C associata ad f nella base $\mathcal{B} = (1+x, 1+2x, -x+x^2)$ di V (sia in partenza che in arrivo).
7. (1 punto) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Sol.: 1) $f(2-3x+4x^2) = 1 - 4x + 4x^2$

2) $f = m_{x+1} \circ \text{Val}_{x-1} + \text{Val}_1 + \text{Val}_{x^2-1} \circ D - m_x$. f è quindi una combinazione lineare di composizioni di funzioni lineari. Per quanto visto a lezione, f è lineare.

3) $f(1) = 2$
 $f(x) = 1$
 $f(x^2) = -x + x^2$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $\text{Ker } A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \text{Ker } f = \langle 1-2x \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\text{Ker } f} = (1-2x)$

5) $\text{GL } A = \langle A^1, A^3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \text{Im } f = \langle 2, -x+x^2 \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\text{Im } f} = (1, -x+x^2)$

6) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\forall v_1, v_2 \in \text{Ker } f, \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = 0_W$
 $\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \text{Ker } f$.

Inoltre, $f(0_V) = 0_W$ e quindi $0_V \in \text{Ker } f$.

Esercizio 5. Si consideri il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e la matrice $A = vv^t$.

1. (1 punto) Calcolare A .
2. (1 punto) Trovare una base per $\text{Col}(A)$ e calcolare il rango di A .
3. (1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(A)}$ del nucleo di A .
4. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
5. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
6. (1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.
7. (1 punto) Calcolare la matrice P_v di proiezione ortogonale sulla retta generata da v e la distanza del punto $Q = (8, 4, -4, 4)^t$ dall'iperpiano $\pi = v^\perp$.

Sol. : 1) $A = (v|v|v|v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\text{Col} A = \langle v \rangle$. $\mathcal{B}_{\text{Col}(A)} = (v)$. $\text{rg} A = 1$

3) $\text{Ker} A = (\text{Col} A^\perp)^\perp = \text{Col} A^\perp = \langle v \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $A = A^t$

4) $A = A^t \implies A$ è ortogonalmente diagonalizzabile.
Tesema speciale

5) $A v = v \cdot v v^t = 4v \implies \text{Sp}(A) = \{0, 4\}$.

6) $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1$

$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} F_2$

$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \implies F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies E_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} F_3$

$B = (E_1 | E_2 | E_3 | \frac{1}{2} v)$. $D = \text{diag}(0, 0, 0, 4)$

7) $P_v = v(v^t v)^{-1} v^t = \frac{1}{4} A$. $\text{dist}(Q, \pi) = \|P_v Q\| = \left\| A \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|$
 $= 3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 6$