Complementi di Fisica - VI Lezione

Potenziale elettrostatico (II parte)
Superfici equipotenziali

Andrea Bettucci

28 marzo 2025

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Potenziale elettrostatico (II parte)

Dati due punti a e b in un campo elettrico, la differenza di potenziale tra i due punti è:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{1}{q}\left(-\int_a^b q\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}\right).$$

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}.$$

La differenza di potenziale tra due punti a e b è uguale al lavoro cambiato di segno che la forza del campo compie quando una carica positiva unitaria si sposta dal punto a al punto b.

Anche la differenza di potenziale tra due punti (detta anche tensione o voltaggio) si misura in volt.

Il potenziale V_b in un generico punto b di un campo elettrico dipende dalla scelta arbitraria del potenziale nel punto di riferimento a.
Di solito si assume nullo il potenziale nel punto a.

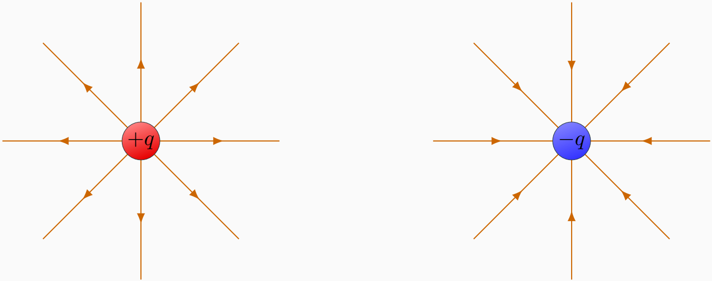
Potenziale in un punto

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}.$$

Il potenziale in un punto b è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene spostata dal punto in considerazione al punto di riferimento a (dove il potenziale è arbitrariamente posto a zero)

Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Si determini il potenziale V in funzione della distanza r da una carica puntiforme q.

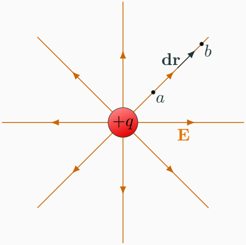


Il campo elettrico di una carica puntiforme è diretto radialmente e vale

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

essendo r la distanza dalla carica e $\mathbf{r}/r$ il versore radiale (uscente dalla carica)

Presi due punti a (di riferimento) e b a distanza r_a ed r_b dal centro della sfera



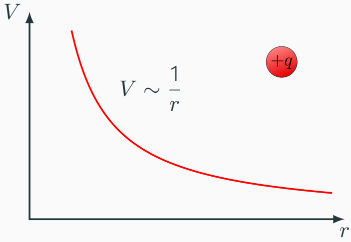
$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dr}$$

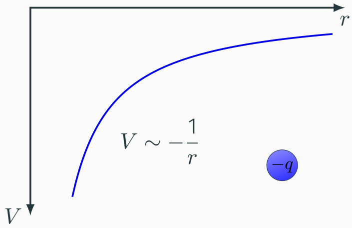
$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_a}\right)$$

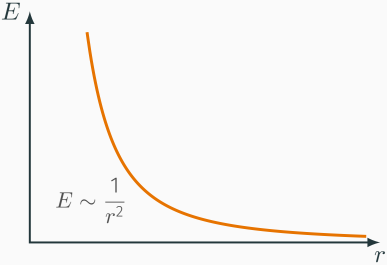
Se si pone a all'infinito ($r_a \to \infty$) con $V_a = 0$

$$V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

V può essere pensato come il potenziale assoluto della carica a distanza r, avendo posto $V = 0$ per $r \to \infty$, o come la differenza di potenziale tra un punto a distanza r dalla carica e un punto all'infinito.


V
+q
V ~ 1/r
r


r
V ~ −1/r
−q
V


E
E ~ 1/r²
r

Anche per il potenziale vale il principio di sovrapposizione

Se si hanno più cariche, il potenziale in un punto P sarà la somma dei potenziali creati dalle singole cariche in quel punto.

- Per un sistema di n cariche puntiformi

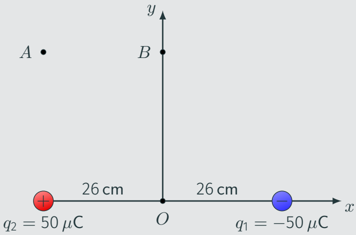
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

- Per una distribuzione C continua di carica

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dq}{r}$$

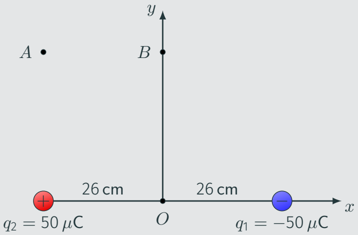
Esercizio

Si determini il potenziale elettrostatico generato dalle due cariche della figura nei punti $A(-26\,\text{cm}, 30\,\text{cm})$ e $B(0\,\text{cm}, 30\,\text{cm})$.



Esercizio

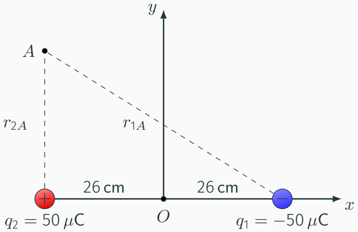
Si determini il potenziale elettrostatico generato dalle due cariche della figura nei punti $A(-26\,\text{cm}, 30\,\text{cm})$ e $B(0\,\text{cm}, 30\,\text{cm})$.



Per il punto A

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1A}} + \frac{q_2}{r_{2A}}\right)$$

$r_{1A} = 60\,\text{cm}$ e $r_{2A} = 30\,\text{cm}$.

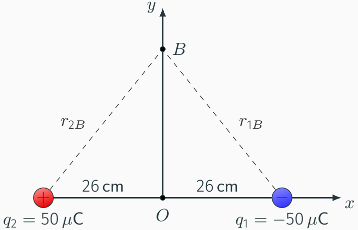


$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-5\times10^{-5}\,\text{C}}{0{,}6\,\text{m}} + \frac{5\times10^{-5}\,\text{C}}{0{,}3\,\text{m}}\right) = 7{,}5\times10^{5}\,\text{V}.$$

Per il punto B

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1B}} + \frac{q_2}{r_{2B}}\right)$$

$r_{1B} = r_{2b} = 40\,\text{cm}.$

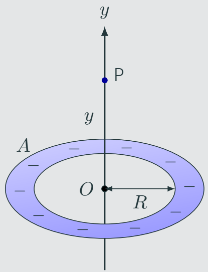


$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-5\times10^{-5}\,\text{C}}{0{,}4\,\text{m}} + \frac{5\times10^{-5}\,\text{C}}{0{,}4\,\text{m}}\right) = 0\,\text{V}.$$

- Essendo le due cariche uguali e contrarie, il potenziale sarà nullo in tutti i punti equidistanti dalle due cariche.
- Tutti i punti che giacciono sul piano normale all'asse x passante per O (piano yz) hanno potenziale nullo.
- Il luogo dei punti dello spazio nei quali il potenziale V è costante si chiama superficie equipotenziale.

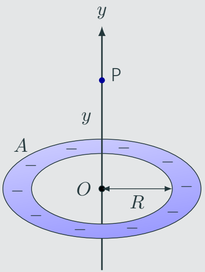
Esercizio

Un sottile anello A di forma circolare di raggio R porta una carica negativa $-q$ uniformemente distribuita.
Si determini il potenziale in un punto P dell'asse dell'anello a distanza y da suo centro O.



Esercizio

Un sottile anello A di forma circolare di raggio R porta una carica negativa $-q$ uniformemente distribuita.
Si determini il potenziale in un punto P dell'asse dell'anello a distanza y da suo centro O.

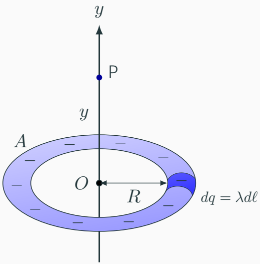


La densità lineica di carica è:

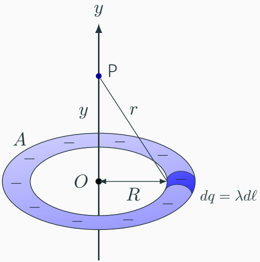
$$\lambda = -\frac{q}{2\pi R}$$

Ogni piccolo elemento di lunghezza $d\ell$ possiede una carica

$$dq = \lambda d\ell < 0$$



Ogni punto dell'anello è equidistante da P e la distanza vale $r = \sqrt{y^2 + R^2}$



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \int_A dq$$

In conclusione, il potenziale nel punto P è determinato

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

Nei punti dell'asse molto lontani dall'anello ($y \gg R$)

$$V(P) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 y}$$

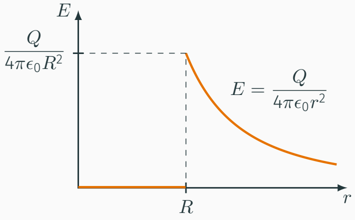
Risultato corretto?

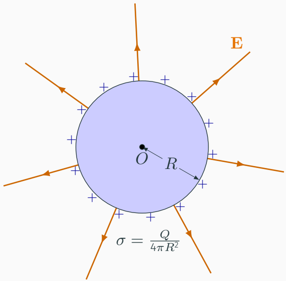
Potenziale elettrostatico di una sfera conduttrice carica

Si determini il potenziale V in funzione della distanza r dal centro di una sfera conduttrice di raggio R uniformemente carica. La carica totale della sfera è Q.

Potenziale elettrostatico di una sfera conduttrice carica

Si determini il potenziale V in funzione della distanza r dal centro di una sfera conduttrice di raggio R uniformemente carica. La carica totale della sfera è Q.

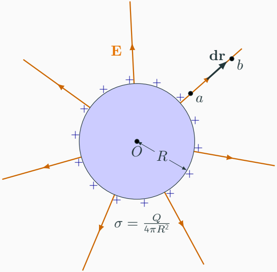




- Nei conduttori le cariche in eccesso si distribuiscono sulla superficie e al loro interno il campo elettrico è nullo.
- Per una sfera conduttrice di raggio R che possieda una carica Q, il campo elettrico per $r > R$ è radiale di intensità pari a quello di una carica puntiforme Q posta al centro della sfera.

1) $r \geq R \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Presi due punti a (di riferimento) e b a distanza r_a ed r_b dal centro della sfera



$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}$$

$$V_b - V_a = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right)$$

Se si pone a all'infinito ($r_a \to \infty$) con $V_a = 0$

$$V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{per } r > R$$

Il potenziale elettrico in punti esterni a una sfera conduttrice uniformemente carica è uguale a quello che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel suo centro

In particolare se $r = R$, ovvero il punto b si trova sulla superficie della sfera

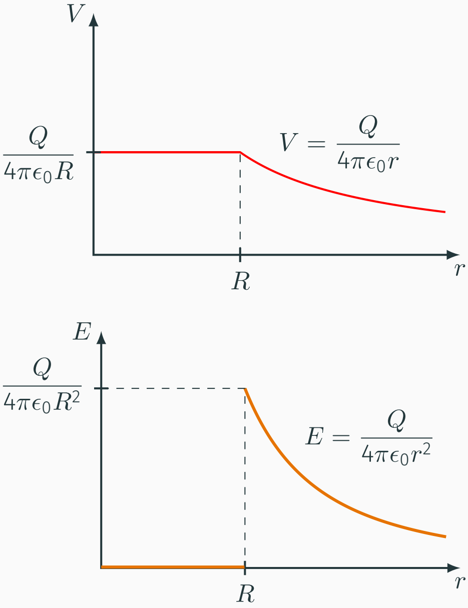
$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

2) $r < R \Rightarrow \mathbf{E} = 0$

La differenza di potenziale tra un punto sulla superficie della sfera ($r = R$) e un qualsiasi punto interno è nulla: tutti i punti interni alla sfera si trovano allo stesso potenziale di quelli della superficie:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Tutta la sfera si trova allo stesso potenziale pari a quello sulla sua superficie.


V
$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$
$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
R
r
E
$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$
$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
R
r

Il campo elettrostatico all’interno
di un conduttore omogeneo e isotropo
in equilibrio è nullo.

Di conseguenza, la superficie e tutto il volume
occupato dal conduttore in condizioni
di equilibrio (statiche)
sono equipotenziali.

Superfici equipotenziali

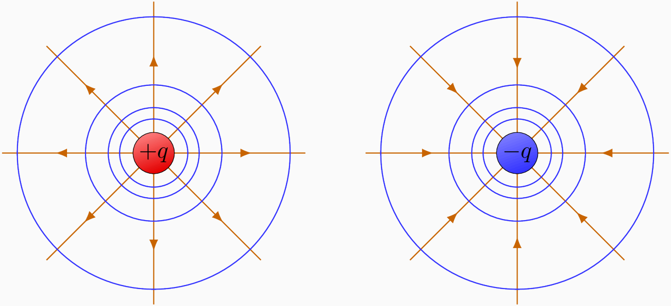
Superfici equipotenziali

Il luogo dei punti dello spazio nei quali il potenziale V è costante si chiama **superficie equipotenziale.**

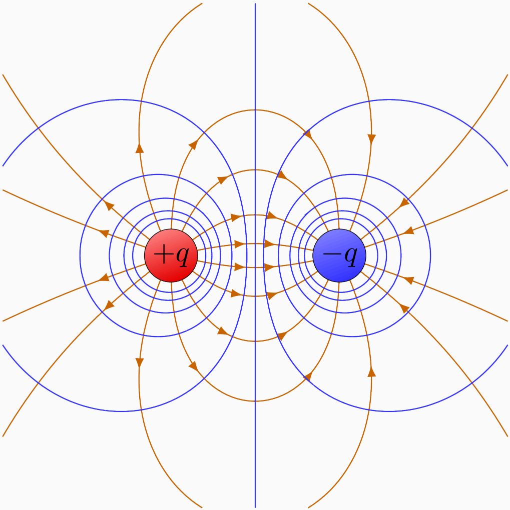
Per avere un'efficace rappresentazione grafica del campo scalare V è opportuno considerare superfici equipotenziali per incrementi ΔV costanti del potenziale.

Per una carica puntiforme le superfici equipotenziali (blu) sono le superfici di sfere concentriche con la carica

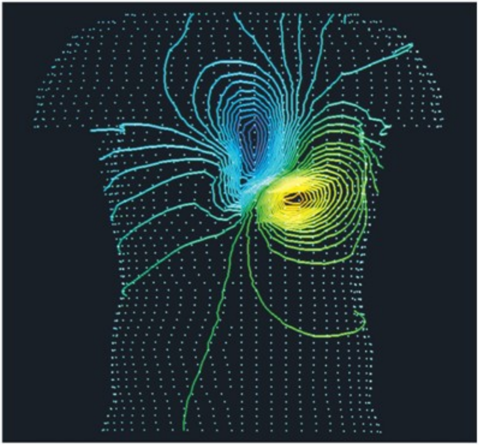
$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$



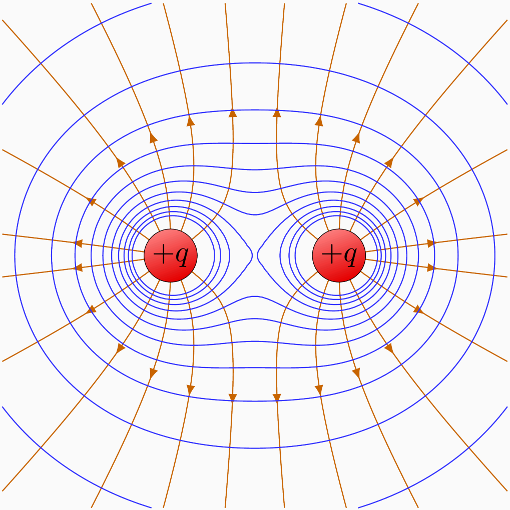
Superfici equipotenziali di un dipolo elettrico



Anche il cuore umano ha una struttura del campo elettrico dipolare

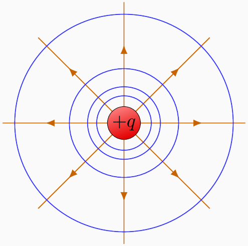


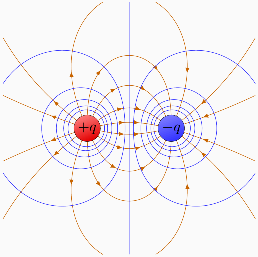
Superfici equipotenziali di due cariche puntiformi positive identiche



Tre punti sui quali meditare:

1. Per un punto dello spazio che non sia occupato da una carica passa una sola superfice equipotenziale (così come passa una sola linea di forza).
2. Le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali
3. Le superfici equipotenziali, che sono disegnate per incrementi di ΔV costante, sono più fitte nelle zone dove il campo elettrico è più intenso



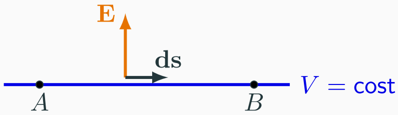


1. Per un punto dello spazio che non sia occupato da una carica passa una sola superfice equipotenziale (così come passa una sola linea di forza).

   $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$: se una carica q si trova in un punto dove si esercita un campo elettrico $\mathbf{E}$, sarà sottoposta a una sola forza.

2. Le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali.

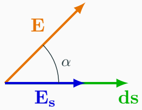
$$V_B - V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = 0$$



Perché le superfici equipotenziali, che sono disegnate per incrementi di ΔV costante, sono più fitte nelle zone dove il campo elettrico è più intenso?

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \quad \Rightarrow \quad dV = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = -E ds \cos\alpha = -E_s ds$$

essendo E_s la componente di $\mathbf{E}$ lungo $\mathbf{ds}$: le stesse variazioni dV del potenziale si ottengono per spostamenti ds più piccoli in zone dove il campo elettrico è più intenso rispetto a zone dove il campo elettrico è meno intenso.



$$E_s = -\frac{dV}{ds} \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- Vi è un campo elettrico in una data direzione solo se in quella direzione vi è una variazione del potenziale.
- Il campo elettrico è diretto verso i potenziali decrescenti.

$$
\begin{cases}
E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex]
E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex]
E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = (E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = (E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad} V.$$

Il campo elettrico è il gradiente cambiato di segno del potenziale.