Fondamenti di fisica generale - V lezione

I parte - Soluzione degli esercizi della III prova di autovalutazione

II parte - Forza elastica e oscillazioni libere

Andrea Bettucci

6 novembre 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

I parte

Soluzione degli esercizi
della III prova di autovalutazione

Esercizio 1

Una massa $m = 300\,\mathrm{g}$ si muove lungo l'asse delle x con la seguente legge oraria: $x(t) = 0,20t - 5,0t^2 + 7,5t^3$ dove t è il tempo espresso in secondi. Si determini la forza agente sulla massa.

Esercizio 1

Una massa $m = 300\,\mathrm{g}$ si muove lungo l'asse delle x con la seguente legge oraria: $x(t) = 0,20t - 5,0t^2 + 7,5t^3$ dove t è il tempo espresso in secondi. Si determini la forza agente sulla massa.

Poiché $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, per trovare la forza occorre determinare l'accelerazione. Poiché il moto avviene lungo l'asse x si può scrivere

$$F_x = ma_x$$

dove

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \qquad \text{e} \qquad v_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Pertanto si ha:

$$v_x(t) = 0.20 - 10t + 22.5t^2 \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = -10 + 45t$$

ottenendo così

$$F_x = 0.3(-10 + 45t)\ \mathrm{N}.$$

Esercizio 2

Una forza $F = 20\,\mathrm{N}$ imprime un'accelerazione $a' = 8\,\mathrm{m/s^2}$ se applicata a una massa m', mentre imprime un'accelerazione $a^\star = 24\,\mathrm{m/s^2}$ se applicata a una massa $m^\star$. Quale accelerazione causerà la forza F se applicata a una massa $M = m' + m^\star$?

Esercizio 2

Una forza $F = 20\,\text{N}$ imprime un'accelerazione $a' = 8\,\text{m/s}^2$ se applicata a una massa m', mentre imprime un'accelerazione $a^\star = 24\,\text{m/s}^2$ se applicata a una massa $m^\star$. Quale accelerazione causerà la forza F se applicata a una massa $M = m' + m^\star$?

Poiché $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si ha:

$$\mathbf{F} = m'\mathbf{a}' \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F} = m^\star\mathbf{a}^\star$$

ottenendo così

$$m' = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{a}'} = 2{,}50\,\text{kg} \qquad \text{e} \qquad m^\star = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{a}^\star} = 0{,}83\,\text{kg}$$

ovvero si trova $M = m' + m^\star = 3{,}33\,\text{kg}$.
In conclusione, si ha:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{M} = 6{,}0\,\text{m/s}^2.$$

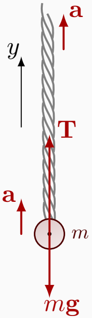
Esercizio 3

Una massa $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ è attaccata all'estremità di una corda inestensibile e priva di massa. Si determini la forza che la corda esercita sulla massa (tensione della corda) se l'accelerazione della massa è: (*a*) $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ verso l'alto; (*b*) $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ verso il basso; (*c*) $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ verso il basso.

Esercizio 3

Una massa $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ è attaccata all'estremità di una corda inestensibile e priva di massa. Si determini la forza che la corda esercita sulla massa (tensione della corda) se l'accelerazione della massa è: (*a*) $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ verso l'alto; (*b*) $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ verso il basso; (*c*) $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ verso il basso.

(*a*) Le forze applicate alla massa m sono indicate in figura dove $\mathbf{T}$ è la forza che la corda esercita sulla massa (tensione della corda). Si scriverà:



$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

$$y) \quad -mg + T = ma$$

trovando così

$$T = m(g + a) \simeq 56{,}5\,\mathrm{N}.$$

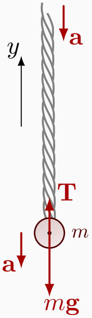
(b) Le forze applicate alla massa m sono sempre il peso $m\mathbf{g}$ e la tensione della corda $\mathbf{T}$; quindi si ha:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

$$y) \quad -mg + T = -ma$$

trovando così

$$T = m(g - a) \simeq 41{,}5\,\mathrm{N}.$$



(c) Ci si trova nelle condizioni del caso precedente: se $a = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = g$ ne deriva che $T = 0$.

La fune, in questo caso, cade verso il basso con la stessa accelerazione (g) con cui cadrebbe la massa m se libera: la massa non tira la corda perché entrambe cadono sottoposte all'accelerazione di gravità.

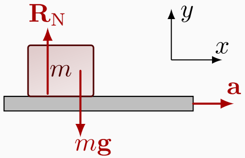
Esercizio 4

Un libro si trova disposto orizzontalmente sul tettuccio di una macchina inizialmente ferma. Sapendo il valore del coefficiente di attrito statico tra libro e tettuccio della macchina vale $\mu_s = 0{,}45$, si determini la massima accelerazione con cui può partire la macchina se si vuole che il libro non scivoli.

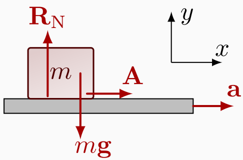
Esercizio 4

Un libro si trova disposto orizzontalmente sul tettuccio di una macchina inizialmente ferma. Sapendo il valore del coefficiente di attrito statico tra libro e tettuccio della macchina vale $\mu_s = 0{,}45$, si determini la massima accelerazione con cui può partire la macchina se si vuole che il libro non scivoli.

Se sul libro non agisse la forza di attrito, le uniche forze su di esso agenti sarebbero il peso $m\mathbf{g}$ e la componente normale della reazione vincolare $\mathbf{R}_{\mathrm{N}}$. In questo caso, quando la macchina parte verso destra con accelerazione $\mathbf{a}$, il libro rimane fermo rispetto a un osservatore solidale con la strada (riferimento xy), ovvero il tettuccio della macchina scivola rispetto al libro.



Per tenere fermo il libro rispetto al tettuccio della macchina, occorre una forza di attrito statico $\mathbf{A}$ diretta come in figura. È la forza d'attrito che, rispetto a un osservatore solidale con la strada, accelera il libro con la stessa accelerazione $\mathbf{a}$ della macchina.



Un osservatore solidale con la strada, osservando il libro, scriverà:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{N} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) \quad A = ma \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{A}{m} \\ y) \quad R_N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg. \end{cases}$$

Poiché $A_{\max} = \mu_s R_N = \mu_s mg$, ne deriva che

$$a_{\max} = \frac{A_{\max}}{m} = \mu_s g.$$

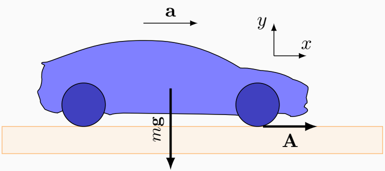
Esercizio 5

Un'automobile di massa m si muove lungo una strada rettilinea. Se μ è il coefficiente di attrito tra le ruote della macchina e l'asfalto della strada si determini la massima accelerazione della macchina se: (*a*) la strada è in piano; (*b*) la strada inclinata rispetto all'orizzontale di una angolo α.

Esercizio 5

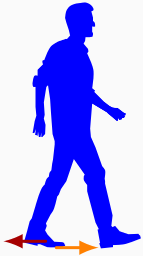
Un'automobile di massa m si muove lungo una strada rettilinea. Se μ è il coefficiente di attrito tra le ruote della macchina e l'asfalto della strada si determini la massima accelerazione della macchina se: (*a*) la strada è in piano; (*b*) la strada inclinata rispetto all'orizzontale di una angolo α.

L'attrito statico $\mathbf{A}$ è la forza che fa avanzare la macchina.



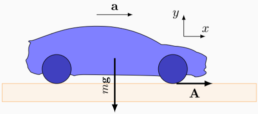
I punti di appoggio tra ruote e terreno tendono a muoversi rispetto a quest'ultimo con una velocità diretta verso sinistra; il terreno tende a ostacolare questo movimento esercitando in questi punti la forza di attrito.

È la stessa condizione che si verifica nell'atto di camminare!!



$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{N} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}$$

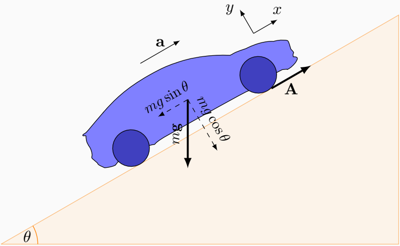
$$\begin{cases} x) \quad A = ma \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{A}{m} \\ y) \quad R_N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg. \end{cases}$$



Poiché $A_{\max} = \mu_s R_N$, ne deriva che

$$a_{\max} = \frac{A_{\max}}{m} = \mu_s g.$$

Anche in questo caso è l'attrito statico $\mathbf{A}$ è la forza che fa avanzare la macchina.



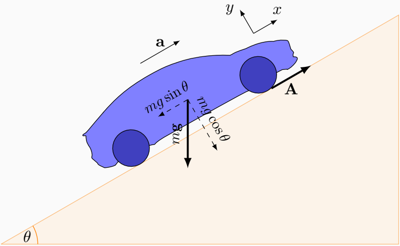
$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) \quad A - mg\sin\theta = ma \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{A}{m} - g\sin\theta \\ y) \quad R_N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\theta. \end{cases}$$

Poiché $A_{\mathrm{max}} = \mu_s R_N$, ne deriva che

$$a_{\mathrm{max}} = \frac{A_{\mathrm{max}}}{m} - g\sin\theta = \frac{\mu_s mg\cos\theta}{m} - g\sin\theta = g(\mu_s\cos\theta - \sin\theta).$$

Anche in questo caso è l'attrito statico $\mathbf{A}$ è la forza che fa avanzare la macchina.



$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{N} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) \quad A - mg\sin\theta = ma \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{A}{m} - g\sin\theta \\ y) \quad R_N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\theta. \end{cases}$$

Poiché $A_\mathrm{max} = \mu_s R_N$, ne deriva che

$$a_\mathrm{max} = \frac{A_\mathrm{max}}{m} - g\sin\theta = \frac{\mu_s mg\cos\theta}{m} - g\sin\theta = g(\mu_s\cos\theta - \sin\theta).$$

θ può avere qualsiasi valore?

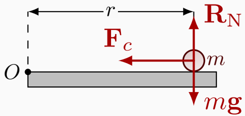
Esercizio 6

Si determini la massima velocità con la quale un'automobile può affrontare una curva avente raggio $r = 80{,}0\,\mathrm{m}$ senza scivolare sull'asfalto sapendo che la strada è in piano e il coefficiente di attrito tra la strada e le ruote dell'automobile vale $\mu = 0.81$.

Esercizio 6

Si determini la massima velocità con la quale un'automobile può affrontare una curva avente raggio $r = 80{,}0\,\mathrm{m}$ senza scivolare sull'asfalto sapendo che la strada è in piano e il coefficiente di attrito tra la strada e le ruote dell'automobile vale $\mu = 0.81$.

Se $m\mathbf{g}$ è la forza peso, la componente normale della reazione vincolare vale $\mathbf{R}_\mathrm{N} = -m\mathbf{g}$. La forza centripeta $\mathbf{F}_c$ necessaria a far muovere la macchina di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio r deve essere fornita dall'attrito statico (statico in direzione radiale!).



Nella direzione radiale si ha

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r}.$$

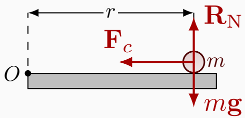
$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

Se la forza centripeta deve essere fornita dall’attrito statico, poiché l’attrito statico ha un’intensità massima pari a $\mu_s R_n$, allora si ha:

$$\mu_s R_n = \mu_s mg = m\frac{v_{\max}^2}{r}$$

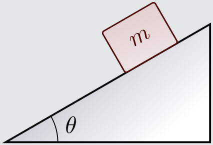
e quindi

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_s g r}.$$



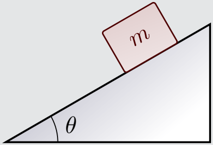
Esercizio 7

Un blocco di massa $m = 12{,}0\,\mathrm{kg}$ è lasciato scivolare **partendo da fermo** dalla cima di un piano inclinato di un angolo $\theta = 40°$ rispetto all'orizzontale e lungo $\ell = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Durante la discesa, sul blocco agisce una forza di attrito $A = 60{,}0\,\mathrm{N}$. Si determini: (*a*) l'accelerazione del blocco; (*b*) il tempo impiegato a raggiungere il fondo del piano inclinato.



Esercizio 7

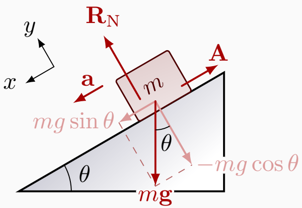
Un blocco di massa $m = 12{,}0\,\mathbf{kg}$ è lasciato scivolare **partendo da fermo** dalla cima di un piano inclinato di un angolo $\theta = 40°$ rispetto all'orizzontale e lungo $\ell = 5{,}0\,\mathbf{m}$. Durante la discesa, sul blocco agisce una forza di attrito $A = 60{,}0\,\mathbf{N}$. Si determini: (*a*) l'accelerazione del blocco; (*b*) il tempo impiegato a raggiungere il fondo del piano inclinato.



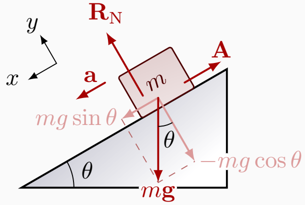
(*a*) La seconda legge della dinamica per la massa m è:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\mathrm{N}} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) \qquad mg\sin\theta - A = ma_x \\ y) \qquad R_{\mathrm{N}} - mg\cos\theta = 0. \end{cases}$$

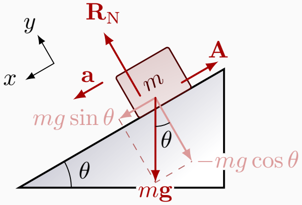


$$\begin{cases} x) \quad mg\sin\theta - A = ma_x \\ y) \quad R_N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$



$$x) \quad a_x = g\sin\theta - \frac{A}{m} = (9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(\sin 40°) - \frac{60{,}0\,\mathrm{N}}{12{,}0\,\mathrm{kg}} = 1{,}31\,\mathrm{m/s^2}.$$

$$\begin{cases} x) \quad mg\sin\theta - A = ma_x \\ y) \quad R_\mathrm{N} - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$



$$x)\;\; a_x = g\sin\theta - \frac{A}{m} = (9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(\sin 40°) - \frac{60{,}0\,\mathrm{N}}{12{,}0\,\mathrm{kg}} = 1{,}31\,\mathrm{m/s^2}.$$

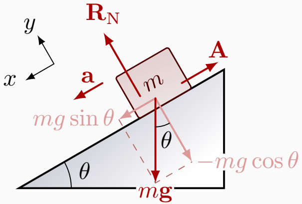
(*b*) Poiché a_x è costante, il moto della massa m è rettilineo uniformemente accelerato, si può quindi scrivere:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

dove $v_0 = 0$ e, se l'origine del sistema di riferimento viene posta nel punto di partenza del blocco, $x_0 = 0$.

Se $\bar{t}$ è il tempo impiegato dal blocco a raggiungere il fondo del piano inclinato, allora deve essere

$$x(\bar{t}) = \ell = 5{,}0\,\mathrm{m}.$$

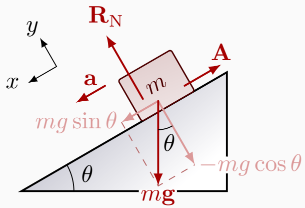


Pertanto si ha:

$$\ell = \frac{1}{2}a_x\bar{t}^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{2\ell}{a_x}} = 2{,}76\,\mathrm{s}.$$

Se $\bar{t}$ è il tempo impiegato dal blocco a raggiungere il fondo del piano inclinato, allora deve essere

$$x(\bar{t}) = \ell = 5{,}0\,\mathrm{m}.$$



Pertanto si ha:

$$\ell = \frac{1}{2}a_x\bar{t}^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{2\ell}{a_x}} = 2{,}76\,\mathrm{s}.$$

Nota: con i dati forniti dall'esercizio si può ricavare anche il valore del coefficiente di attrito dinamico tra blocco e piano inclinato.

$$A = \mu_d R_\mathrm{N} = \mu_d mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{A}{mg\cos\theta} \simeq 0,67.$$

Esercizio 8

Quale deve essere l'intensità di una forza parallela a un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale per dare a un blocco di massa $m = 5\,\mathrm{kg}$ giacente sul piano un'accelerazione $a = 0{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ diretta lungo il piano inclinato verso l'alto (*a*) se il piano è liscio? (*b*) Se il coefficiente di attrito tra piano e blocco vale $0,30$?

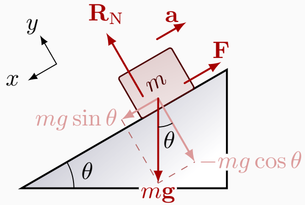
Esercizio 8

Quale deve essere l'intensità di una forza parallela a un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale per dare a un blocco di massa $m = 5\,\mathrm{kg}$ giacente sul piano un'accelerazione $a = 0{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ diretta lungo il piano inclinato verso l'alto (*a*) se il piano è liscio? (*b*) Se il coefficiente di attrito tra piano e blocco vale $0,30$?

(*a*) Nel caso in cui il piano sia liscio, le forze applicata alla blocco sono indicate in figura; si scriverà quindi:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{N} + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) \qquad mg\sin\theta - F = -ma \\ y) \qquad R_\mathrm{N} - mg\cos\theta = 0. \end{cases}$$

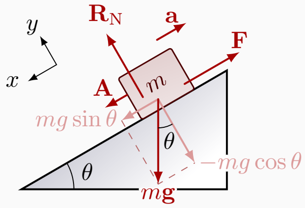


$$x)\ \ mg\sin\theta - F = -ma \quad \Rightarrow \quad F = m(g\sin\theta + a) = 25{,}5\,\mathrm{N}.$$

$$x)\ \ mg\sin\theta - F = -ma \quad \Rightarrow \quad F = m(g\sin\theta + a) = 25{,}5\,\mathrm{N}.$$

(*b*) Nel caso in cui il piano sia scabro, le forze applicata alla blocco sono indicate in figura; si scriverà quindi:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{N} + \mathbf{F} + \mathbf{A} = m\mathbf{a}$$



$$\begin{cases} x) \quad mg\sin\theta + A - F = -ma \\ y) \quad R_\mathrm{N} - mg\cos\theta = 0. \end{cases}$$

$$y)\ \ R_\mathrm{N} - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{N} = mg\cos\theta$$

$$x)\ \ mg\sin\theta + A - F = -ma \quad \Rightarrow \quad F = m(g\sin\theta + a) + \mu(mg\cos\theta) = 38{,}2\,\mathrm{N}.$$

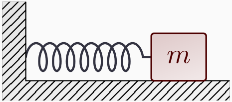
II parte

La forza elastica

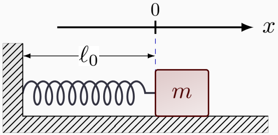
- Le **forze elastiche** hanno origine nella deformazione dei corpi finché tali deformazioni sono piccole.
- I corpi sottoposti ad azioni che tendono a variare il loro assetto di riposo e si deformano.
- Le deformazioni producono delle forze dirette come le azioni esterne ma in verso opposto.
- Entro certi limiti (elastici) **le intensità di queste forze (elastiche) sono proporzionali alle deformazioni.**

- Le forze elastiche hanno origine nella deformazione dei corpi finché tali deformazioni sono piccole.
- I corpi sottoposti ad azioni che tendono a variare il loro assetto di riposo e si deformano.
- Le deformazioni producono delle forze dirette come le azioni esterne ma in verso opposto.
- Entro certi limiti (elastici) le intensità di queste forze (elastiche) sono proporzionali alle deformazioni.

Si consideri, ad esempio, una massa m attaccata all'estremità di una molla a spirale disposta orizzontalmente. Considereremo solo molle ideali, ovvero molle aventi massa trascurabile.

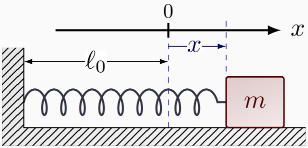


La molla è un corpo elastico. Sia ℓ_0 la lunghezza della molla in assetto di riposo (molla non deformata). Un asse delle x è disposto assialmente alla molla con l'origine O tale che sia nulla l'ascissa del punto di attacco tra molla e massa.

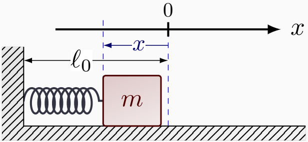


La molla può essere deformata assialmente spostando orizzontalmente la massa di una quantità x. Data la scelta dell'origine del sistema di riferimento, la quantità x coincide con la deformazione della molla: se $x > 0$ la deformazione è un'estensione; se $x < 0$ la deformazione è una compressione.

La molla può essere deformata assialmente spostando orizzontalmente la massa di una quantità x. Data la scelta dell'origine del sistema di riferimento, la quantità x coincide con la deformazione della molla: se $x > 0$ la deformazione è un'estensione; se $x < 0$ la deformazione è una compressione.



Estensione della molla
$x > 0$

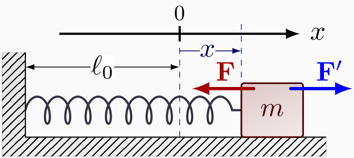


Compressione della molla
$x < 0$

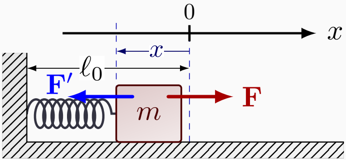
- Deformando la molla con una forza $\mathbf{F}'$, la forza $\mathbf{F}$ che la molla esercita sulla massa è diretta lungo x tale da riportare m nella posizione di riposo in $x = 0$.
- Se x è piccolo, $\mathbf{F}$ ha intensità proporzionale a x.
- La forza elastica ha espressione:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} \qquad \text{Legge di Hooke}$$

con $k > 0$ costante elastica della molla e $\mathbf{i}$ versore dell'asse x.



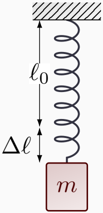
$F_x = -kx$ è negativa poiché x è positivo



$F_x = -kx$ è positiva poiché x è negativo

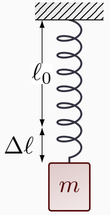
Esercizio

Una molla avente costante elastica $k = 300\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 80\,\mathrm{cm}$ è attaccata con un'estremità al soffitto di una parete mentre l'altra estremità è attaccata a una massa $m = 4\,\mathrm{kg}$. Quale sarà l'allungamento $\Delta\ell$ della molla?



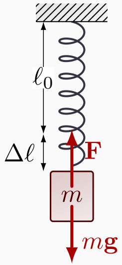
Esercizio

Una molla avente costante elastica $k = 300\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 80\,\mathrm{cm}$ è attaccata con un'estremità al soffitto di una parete mentre l'altra estremità è attaccata a una massa $m = 4\,\mathrm{kg}$. Quale sarà l'allungamento $\Delta\ell$ della molla?



Nella posizione di equilibrio della massa m, deve essere nullo il risultante delle forze su di essa agenti, cioè l'intensità della forza peso e della forza elastica deve essere uguale:

$$mg = k\Delta\ell \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k}.$$

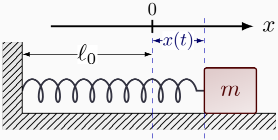


Sostituendo i valori numerici si trova:

$$\Delta\ell = \frac{(4\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{300\,\mathrm{N/m}} = 0{,}13\,\mathrm{m}.$$

Oscillazioni libere

Se si rimuove la forza esterna $\mathbf{F}'$ che ha deformato la molla, la massa m comincia a muoversi sotto l'azione della sola forza elastica $\mathbf{F}(t) = -kx(t)\mathbf{i}$.



Applicando la seconda legge della dinamica alla massa m e proiettandola lungo l'asse x si ottiene:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{1}$$

La massa m si muove lungo l'asse x di moto armonico; infatti la legge oraria del moto (la soluzione dell'Eq. (1)) è

$$x(t) = A\cos\omega_0 t$$

dove l'ampiezza $A = x(0)$ è pari allo spostamento iniziale della massa m.

Proviamo che il moto è armonico, ovvero che $x(t) = A\cos\omega_0 t$ è soluzione della seconda equazione della dinamica. Infatti si ha

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t.$$

Sostituendo nella seconda equazione della dinamica

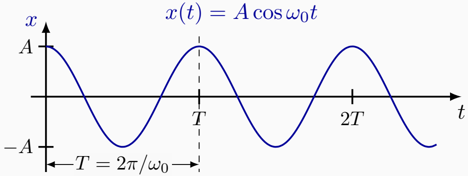
$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

si ottiene

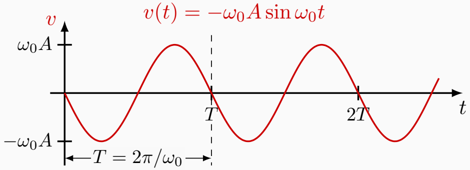
$$-k(A\cos\omega_0 t) = m(-A\omega_0^2 \cos\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il moto è armonico con un periodo e una frequenza dati da:

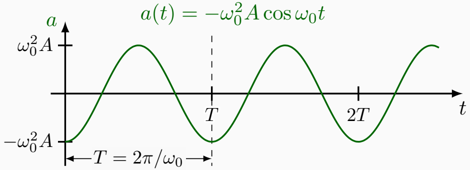
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



$x(t) = A\cos\omega_0 t$
x
A
$-A$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega_0$



$v(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t$
v
$\omega_0 A$
$-\omega_0 A$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega_0$

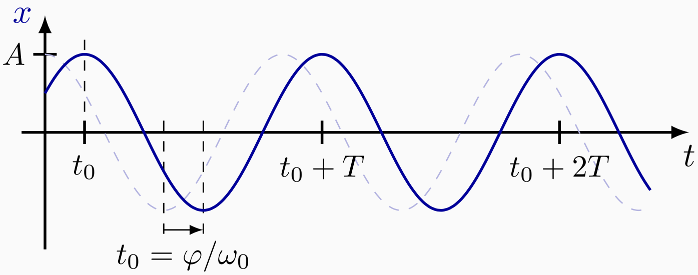


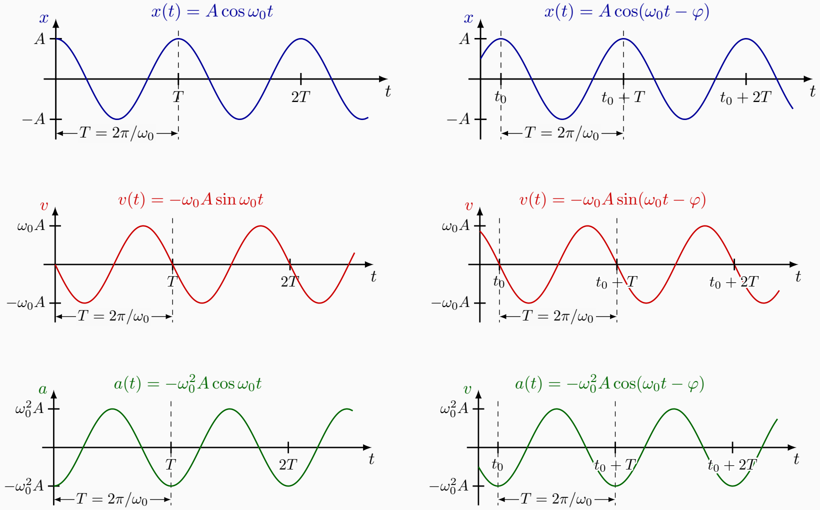
$a(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t$
a
$\omega_0^2 A$
$-\omega_0^2 A$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega_0$

- Non è detto che all'istante $t = 0$ la massa si trovi in A con velocità nulla.
- In generale sarà (**riguardate la lezione sul moto armonico!**):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t \pm \varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) = A\cos\omega_0(t - \tfrac{\varphi}{\omega_0})$$




$x(t) = A\cos\omega_0 t$
$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$
$v(t) = -\omega_0 A \sin\omega_0 t$
$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t - \varphi)$
$a(t) = -\omega_0^2 A \cos\omega_0 t$
$a(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t - \varphi)$
$T = 2\pi/\omega_0$
t_0
$t_0 + T$
$t_0 + 2T$

Esercizio

Una massa si muove lungo l'asse x con la seguente legge oraria:

$$x(t) = 0{,}3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

dove x è espresso in metri e t in secondi. *(a)* Qual è la frequenza, il periodo, l'ampiezza, la pulsazione e la fase del moto? *(b)* Qual è la posizione della massa nell'istante $t = 1\,\mathrm{s}$? *(c)* Qual è la velocità e l'accelerazione della massa? *(d)*. Si determinino la posizione e la velocità iniziale della massa.

(a) Confrontando la legge oraria data con l'espressione generale di un moto armonico $x(t) = A\cos(\omega_0 t \pm \varphi)$ si ha:

- pulsazione: $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$
- ampiezza: $A = 0{,}3\,\mathrm{m}$
- fase del moto: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

(b) Nell'istante $t = 1\,\mathrm{s}$ la posizione della massa è:

$$x(t) = 0{,}3 \cos\left[2(1) + \frac{\pi}{6}\right] = -0{,}245\,\mathrm{m}.$$

(c) La velocità della massa è:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0{,}3 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \frac{d}{dt}(2t) = -0{,}6 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

mentre l'accelerazione è:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0{,}6 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \frac{d}{dt}(2t) = -1{,}2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

(d) La posizione iniziale della massa è:

$$x_0 = x(t = 0) = 0{,}3 \cos\frac{\pi}{6} = 0{,}260\,\mathrm{m}$$

mentre la velocità iniziale è:

$$v_0 = v(t = 0) = -0{,}6 \sin\frac{\pi}{6} = -0{,}300\,\mathrm{m/s}.$$