Complementi di Fisica - V Lezione

Soluzione degli esercizi 3, 4, 5 e 8 della III prova di autovalutazione

Potenziale elettrostatico (I parte)

Andrea Bettucci

27 marzo 2025

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

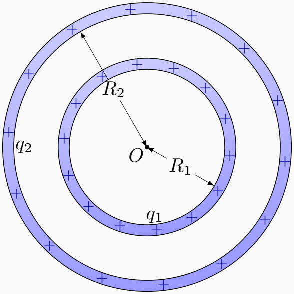
Soluzione degli esercizi 3, 4, 5 e 8 della III prova di autovalutazione

Esercizio 3

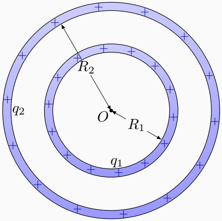
Su di un guscio sferico di raggio R_1 vi è una carica totale q_1 uniformemente distribuita sulla sua superficie. Un secondo, più grande guscio sferico di raggio R_2 concentrico al primo, porta una carica q_2 uniformemente distribuita sulla sua superficie. *(a)* Si usi la legge di Gauss per trovare il campo elettrico nelle regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$, essendo r la distanza da centro dei gusci sferici. *(b)* Quale dovrebbe essere il rapporto delle cariche q_1/q_2 e i loro relativi segni affinché il campo elettrico sia zero per $r > R_2$?

Esercizio 3

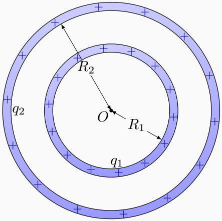
Su di un guscio sferico di raggio R_1 vi è una carica totale q_1 uniformemente distribuita sulla sua superficie. Un secondo, più grande guscio sferico di raggio R_2 concentrico al primo, porta una carica q_2 uniformemente distribuita sulla sua superficie. *(a)* Si usi la legge di Gauss per trovare il campo elettrico nelle regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$, essendo r la distanza da centro dei gusci sferici. *(b)* Quale dovrebbe essere il rapporto delle cariche q_1/q_2 e i loro relativi segni affinché il campo elettrico sia zero per $r > R_2$?



Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superfice di sfere centrate in O: come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r ($0 \leq r \leq \infty$) centrata in O.

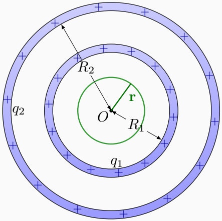


Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superfice di sfere centrate in O: come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r ($0 \leq r \leq \infty$) centrata in O.

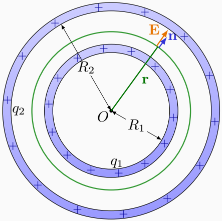


a) Se $r < R_1$ non vi è carica elettrica all'interno della sfera, pertanto:

$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0.$$



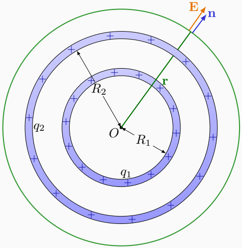
Se $R_1 \leq r < R_2$, la carica elettrica all'interno della sfera è pari a q_1 e, data la simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico deve essere diretto radialmente con valore costante sulla superficie; quindi:



$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{q_1}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Se $r \geq R_2$, la carica elettrica all'interno della sfera è pari a $q_1 + q_2$ e, sempre per la simmetria sferica della distribuzione di carica, il campo elettrico non può che seere diretto radialmente con valore costante sulla superficie; quindi:



$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{(q_1 + q_2)}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

b) Se per $r > R_2$ il campo elettrico deve essere nullo, dalla relazione precedente deve essere

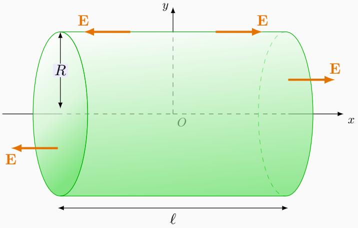
$$q_1 + q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -q_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{q_2} = -1.$$

Esercizio 4

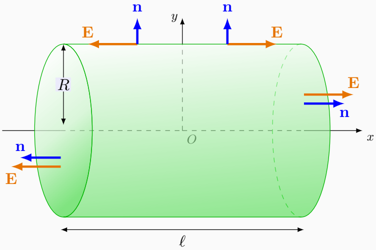
Vi è un campo elettrico $\mathbf{E} = (200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella regione $x > 0$ ed $\mathbf{E} = (-200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella la regione $x < 0$. Una superficie immaginaria a forma di cilindro retto di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ e raggio $R = 5\,\mathrm{cm}$ è disposta con il suo asse lungo l'asse x con una base nel punto di coordinata $x = \ell/2$ e l'altra base nel punto $x = -\ell/2$. *(a)* Determinare il flusso netto del campo elettrico attraverso l'intera superficie chiusa. *(b)* Quanto vale la carica netta totale all'interno della superficie chiusa?

Esercizio 4

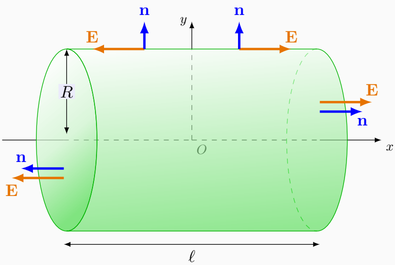
Vi è un campo elettrico $\mathbf{E} = (200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella regione $x > 0$ ed $\mathbf{E} = (-200\,\mathrm{N/C})\mathbf{i}$ nella la regione $x < 0$. Una superficie immaginaria a forma di cilindro retto di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ e raggio $R = 5\,\mathrm{cm}$ è disposta con il suo asse lungo l'asse x con una base nel punto di coordinata $x = \ell/2$ e l'altra base nel punto $x = -\ell/2$. *(a)* Determinare il flusso netto del campo elettrico attraverso l'intera superficie chiusa. *(b)* Quanto vale la carica netta totale all'interno della superficie chiusa?



$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$



- Il flusso del campo elettrico attraverso la superfice chiusa cilindrica è la somma di tutti i flussi (**con il loro segno!**) attraverso le superfici che compongono il cilindro.
- Data la direzione del versore normale alle superfici $\mathbf{n}$, è nullo il flusso netto del campo elettrico attraverso la superficie laterale del cilindro.
- Per la struttura del campo elettrico, il flusso attraverso le due superfici di base ha identico valore.

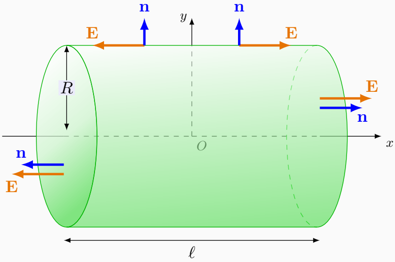


$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = \int_S E dS = E(\pi R^2)$$

$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{netto}} = 2\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = 2E(\pi R^2) = 3{,}14\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}.$$

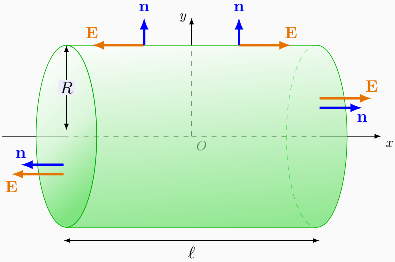
In conclusione, è noto il valore della carica elettrica all'interno del cilindro.

$$Q_{\text{int}} = \epsilon_0 \Phi(\mathbf{E})_{\text{totale}} = (8{,}85\times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)(3{,}14\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}) = 27{,}8\,\mathrm{pC}.$$



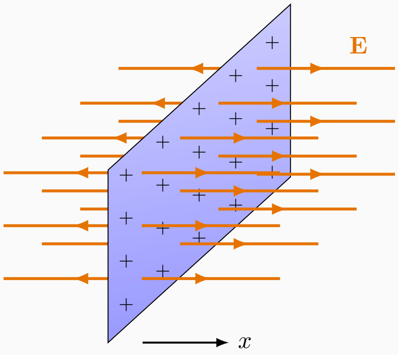
Due domandi interessanti

1. Perché la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro? Aumentando ℓ, ad esempio, aumenta il volume del cilindro e, di conseguenza dovrebbe aumentare la carica elettrica contenuta al suo interno!!
2. Perché, invece, la carica elettrica all'interno del cilindro dipende dal raggio R delle basi?

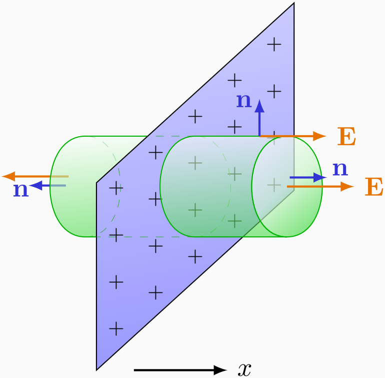


Due domandi interessanti

1. Perché la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro? Aumentando ℓ, ad esempio, aumenta il volume del cilindro e, di conseguenza dovrebbe aumentare la carica elettrica contenuta al suo interno!!
2. Perché, invece, la carica elettrica all'interno del cilindro dipende dal raggio R delle basi?
3. **Con quale distribuzione di carica è possibile creare il campo elettrico dell'esercizio?**



Una distribuzione piana infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ genera un campo elettrico uniforme, di intensità $E = \sigma/2\epsilon_0$ perpendicolare al piano, diretto in versi opposti nei due semispazi individuati dal piano (**II Lezione**).



È questo il motivo per il quale la carica elettrica all'interno del cilindro è indipendente dalla lunghezza del cilindro, ma è funzione del raggio R delle basi del cilindro!!

Esercizio 5

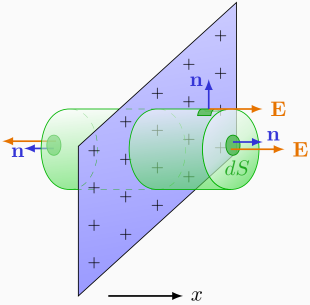
Utilizzando la legge di Gauss si determini il campo elettrico creato da una distribuzione uniforme piana di carica infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ.

Esercizio 5

Utilizzando la legge di Gauss si determini il campo elettrico creato da una distribuzione uniforme piana di carica infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ.

- Data la distribuzione di carica, $\mathbf{E}$ deve essere ad essa perpendicolare, con versi opposti nei due semispazi individuati dal piano.
- $\mathbf{E}$ deve avere la stessa intensità in punti equidistanti dal piano.
- Il calcolo del flusso del campo elettrico diviene allora semplice se, come superficie chiusa, si sceglie un piccolo cilindro retto chiuso con asse perpendicolare alla distribuzione di cariche e basi, di raggio R, da essa equidistanti.

Per quanto è stato detto nell'esercizio precedente, il flusso del campo elettrico attraverso il cilindro così scelto si riduce al solo flusso attraverso le basi del cilindro.



$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = \int_S E dS = E(\pi R^2)$$

$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{netto}} = 2\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = 2E(\pi R^2).$$

La carica elettrica all'interno del cilindro è quella sulla superficie circolare intersezione tra il cilindro e il piano delle cariche:

$$Q_{\text{int}} = \sigma(\pi R^2).$$

In conclusione, dal teorema di Gauss si ottiene l'intensità di $\mathbf{E}$.

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2E(\pi R^2) = \frac{\sigma(\pi R^2)}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Esercizio 8

In una sfera isolante di raggio R è distribuita una carica Q con densità dipendente dalla distanza r dal centro della sfera secondo la legge $\rho(r) = \alpha r^2$ con α costante. Supponendo noti i valori di R e Q, si determini la costante α e il campo elettrico in un generico punto P esterno alla sfera.

Poiché la densità della distribuzione di carica è funzione della distanza dal centro della sfera, la carica totale va espressa come

$$Q = \int_V \rho(r) dV$$

essendo l'integrale esteso a tutto il volume V della sfera.
Per una sfera di raggio r

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Di conseguenza,

$$Q = \int_0^R (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\alpha R^5$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{5}{4}\frac{Q}{\pi R^5}.$$

Di conseguenza,

$$Q = \int_0^R (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\alpha R^5$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{5}{4}\frac{Q}{\pi R^5}.$$

Per quanto riguarda il campo elettrico in un punto P al di fuori della sfera, per $r > R$ la distribuzione di carica, anche se di densità non costante, conserva la simmetria sferica poiché $\rho = \rho(r)$; di conseguenza, la distribuzione di carica dal punto di vista del campo elettrico creato in P equivale a una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera; pertanto si ha:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Potenziale elettrostatico (I parte)

Forze conservative

Se una forza $\mathbf{F}$ è conservativa è possibile definire l'energia potenziale $U(x, y, z)$ tale che

$$L = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = U_a - U_b = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad L = -\Delta U.$$

In un campo di forze conservative l'energia meccanica E rimane costante:

$$E = T + U$$

dove T rappresenta l'energia cinetica

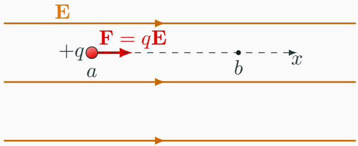
$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

La forza di Coulomb è conservativa

Per una carica positiva q che sotto l'azione di un campo elettrostatico $\mathbf{E}$ si muova dalla posizione a alla posizione b

$$\Delta U = U_b - U_a = -\int_a^b q\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}.$$

In un campo elettrico uniforme



$$U_b - U_a = -\int_a^b q\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = -qE(x_b - x_a) = -qEd.$$

Spostandosi da sinistra verso destra con accelerazione costante, la carica q diminuisce la propria energia potenziale e aumenta della stessa quantità l'energia cinetica: l'energia meccanica si conserva.

Potenziale elettrostatico

Il potenziale elettrostatico V è l'energia potenziale per unità di carica.

Se una carica q possiede nel punto b energia potenziale elettrica U_b (rispetto allo zero dell'energia potenziale), il potenziale elettrostatico di quel punto è

$$V_b = \frac{U_b}{q}.$$

- Il potenziale elettrostatico (come il campo elettrico) non dipende dalla carica di prova q. V dipende solo dalle cariche che creano il campo: la carica q in un punto del campo acquista una data energia potenziale per effetto del potenziale V in quel punto creato da altre cariche.
- L'unità di misura del potenziale elettrostatico (che è una funzione scalare) è joule/coulomb detto **volt**: $1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J}/1\,\mathrm{C}$.

Dal punto di vista fisico quelle che sono perfettamente determinate sono le differenze di potenziale fra punti.

Dati due punti a e b in un campo elettrico, la differenza di potenziale tra i due punti è:

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{1}{q}\left(-\int_a^b q\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}\right).$$

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}.$$

La differenza di potenziale tra due punti a e b è uguale al lavoro cambiato di segno che la forza del campo compie quando una carica positiva unitaria si sposta dal punto a al punto b.

Anche la differenza di potenziale tra due punti (detta anche tensione o voltaggio) si misura in volt.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} \quad \Rightarrow \quad V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} + V_a.$$

Il potenziale V_b in un generico punto b di un campo elettrico dipende dalla scelta arbitraria del potenziale nel punto di riferimento a.
Di solito si assume nullo il potenziale nel punto a.

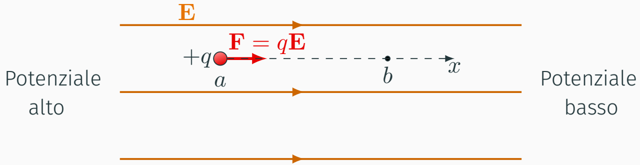
Potenziale in un punto

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = \int_b^a \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}.$$

Il potenziale in un punto b è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene spostata dal punto in considerazione al punto di riferimento a (dove il potenziale è arbitrariamente posto a zero)

Dove porre a zero il potenziale?

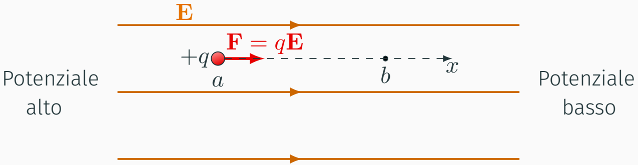
- Spesso il suolo (la Terra), o un conduttore connesso direttamente al suolo, è assunto come zero del potenziale e tutti gli altri valori del potenziale sono riferiti al suolo. Si dice quindi, ad esempio, che un punto ha un potenziale di 100 V se la differenza di potenziale tra questo punto e il suolo è 100 V.
- In altri casi, vedremo più avanti, sarà conveniente scegliere come zero del potenziale quello di un punto posto all'infinito ($r \to \infty$). In questo caso, il potenziale in un punto è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene portata dal punto che si considera all'infinito.



$$U_b - U_a = -\int_a^b q\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = -qE(x_b - x_a) = -qEd < 0$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -Ed < 0 \tag{1}$$

- Le cariche positive si muovono verso i punti a potenziale decrescente: $\Delta V < 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Le cariche negative si muovono verso i punti a potenziale crescente: $\Delta V > 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Il campo elettrico è diretto verso i potenziali decrescenti.



$$U_b - U_a = -\int_a^b q\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = -qE(x_b - x_a) = -qEd < 0$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -Ed < 0 \tag{1}$$

- Le cariche positive si muovono verso i punti a potenziale decrescente: $\Delta V < 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Le cariche negative si muovono verso i punti a potenziale crescente: $\Delta V > 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Il campo elettrico è diretto verso i potenziali decrescenti.

Dall'Eq. (1) si vede come il campo elettrico si può anche misurare in V/m

Le sorgenti di energia elettrica, come le pile, hanno lo scopo di mantenere una differenza di potenziale.
La quantità di energia prodotta da questi dispositivi dipende dalla carica che fluisce e dalla differenza di potenziale.

Esempio

Si supponga di avere una batteria da 1,5 V che alimenta una lampadina: la quantità di energia elettrica trasformata in luce e calore dipende dal flusso totale di carica, che a sua volta dipende da quanto la batteria resta accesa.
Se in un certo tempo Δt fluiscono 2 C di carica attraverso la lampadina

$$\Delta U = q\Delta V = (2\,\mathrm{C}) \cdot (1{,}5\,\mathrm{V}) = 3\,\mathrm{J}$$

Se il tempo di accensione fosse doppio, fluirebbero 4 C di carica e l'energia elettrica trasformata in luce e calore sarebbe

$$\Delta U = (4\,\mathrm{C}) \cdot (1{,}5\,\mathrm{V}) = 6\,\mathrm{J}$$

Alcune tipiche differenze di potenziale

Sorgente	V, volt
Nubi temporalesche rispetto al terreno	$\sim 10^8$
Linea elettrica di alta tensione	$\sim 10^6$
Elettrodi candela automobile	$\sim 10^4$
Presa di corrente domestica	220
Batteria automobile	12
Potenziale a riposo attraverso membrana cellula nervosa	10^{-1}
Variazione di potenziale sulla pelle (elettrocardiogramma ed elettroencefalogramma)	10^{-4}

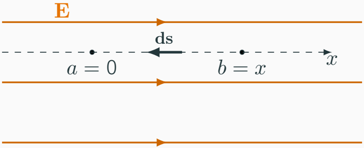
Esercizio

Un campo elettrico punta nella direzione positiva dell'asse x e ha intensità costante pari a $10\,\mathrm{N/C} = 10\,\mathrm{V/m}$. Si determini come varia il potenziale in funzione di x, assumendo $V = 0$ in $x = 0$.

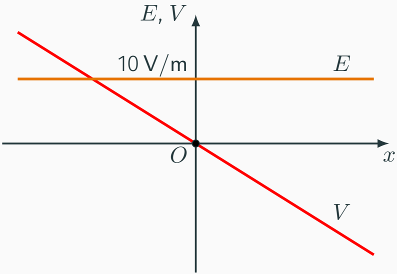
Il potenziale in un punto b è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene spostata dal punto in considerazione al punto di riferimento a (dove il potenziale è arbitrariamente posto a zero).

$$V_b = \int_b^a \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$$

Nel caso dell'esercizio il punto b è un generico punto di coordinata x e il punto a è il punto in $x = 0$.



$$V(x) = \int_x^0 \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = E\int_x^0 dx = -Ex = -(10\,\mathrm{V/m})x$$



Il potenziale decresce di 10 V per ogni metro di spostamento da sinistra verso destra.