SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Fondamenti di fisica generale - IX Lezione

Crescita e decrescita esponenziale

Andrea Bettucci

2 dicembre 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Crescita e decrescita esponenziale

LA FUNZIONE ESPONENZIALE È UNA DELLE FUNZIONI PIÙ IMPORTANTI E DIFFUSE IN FISICA E BIOLOGIA

In biologia, può descrivere:

- la crescita di batteri o popolazioni animali;
- la diminuzione del numero di batteri in risposta a un processo di sterilizzazione;
- la crescita di un tumore o l'assorbimento o l'eliminazione nel tempo di un farmaco.
- La crescita esponenziale non può continuare per sempre a causa delle limitazioni dei nutrienti, ecc..

La conoscenza della funzione esponenziale rende più facile comprendere i tassi di nascita e di morte, anche quando non sono costanti.

In fisica, può descrivere:

- il decadimento dei nuclei radioattivi;
- l'emissione di luce da parte degli atomi;
- l'assorbimento della luce mentre attraversa la materia;
- il cambiamento di tensione o corrente in alcuni circuiti elettrici;
- la variazione di temperatura nel tempo quando un oggetto caldo si raffredda;
- la velocità di alcune reazioni chimiche.

Crescita esponenziale

Un processo di crescita esponenziale è quello nel quale il tasso di aumento di una quantità è proporzionale al valore attuale di quella quantità.
Detta in altri termini: **più è grande la quantità di cui si dispone, più essa si accresce**. Se la quantità è piccola aumenta poco, se è media aumenta moderatamente, se è grande aumenta molto.

$$\frac{dx}{dt} = cx \quad \Rightarrow \quad dx = cxdt$$

dove c è una costante positiva che rappresenta la crescita percentuale di x nell'unità di tempo ($dt = 1$):

$$c = \frac{dx}{x} \ \text{per} \ dt = 1$$

e si esprime in %/s.

Ma come varia x nel tempo se cresce esponenzialmente?

$$dx = cxdt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = cdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int cdt$$

e quindi si ha

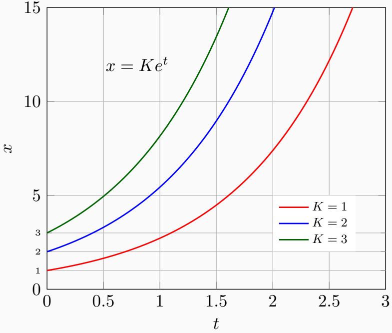
$$\ln x = ct + \text{cost} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{ct+\text{cost}} = e^{ct} e^{\text{cost}}$$

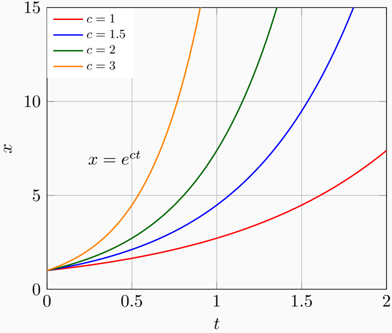
cosicché

$$x(t) = Ke^{ct}$$

dove il valore costante $K = e^{\text{cost}}$ rappresenta il valore di x all'istante $t = 0$.

$$x(t) = Ke^{ct}$$





$$x(t) = Ke^{ct} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = cKe^{ct} = cx(t)$$

- Ogni qual volta si ha un problema nel quale il tasso di crescita di una qualche grandezza è proporzionale al valore attuale della grandezza, ci si deve aspettare una crescita esponenziale di quella grandezza
- Negli esempi precedenti la variabile indipendente era il tempo t, nel qual caso c rappresenta la variazione percentuale per unità di tempo. Ma si potrebbe avere una grandezza che cresce esponenzialmente con la distanza; in questo caso la variabile indipendente sarebbe la distanza e c rappresenterebbe la variazione percentuale per unità di lunghezza. In questo caso occorrerebbe utilizzare il simbolo x al posto di t, e indicare la variabile dipendente con y:

$$y(x) = e^{cx}$$

- Più in generale una **funzione esponenziale** è una funzione in cui la variabile indipendente, qui ancora supponendo sia il tempo t, compare ad esponente:

$$x(t) = Ka^{ct}$$

  dove K è il valore della funzione per $t = 0$, e a è una costante positiva.

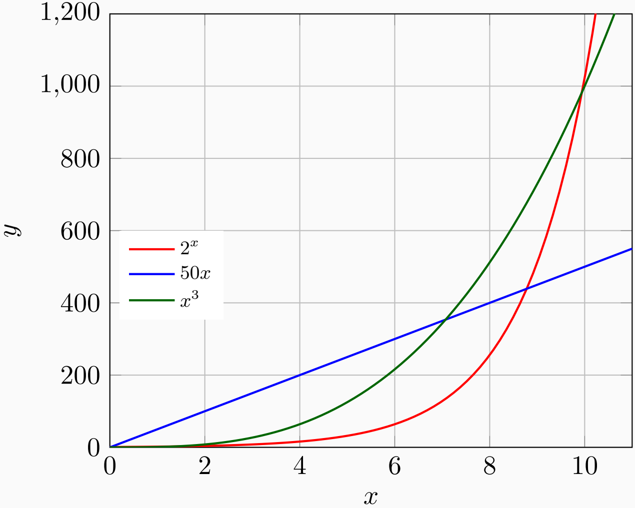
- **Si ha una crescita esponenziale nel tempo della grandezza x se la costante $c > 0$, mentre la grandezza x decresce esponenzialmente nel tempo se la costante $c < 0$.**

- Tra le funzioni esponenziali quella che ha per base il numero $e = 2,71828\ldots$ ha la caratteristica di coincidere con la sua derivata

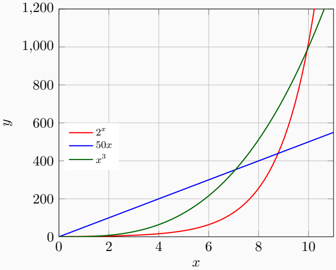
$$x(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = e^t$$

  e a essa si riserva di fatto il nome di funzione esponenziale.

Nell'immaginario comune l'espressione crescita esponenziale è spesso associata al concetto di crescita veloce: tale convinzione è errata!



- Come si può leggere dal grafico, non in tutti i punti la crescita esponenziale è la funzione di crescita più veloce. Inizialmente, per esempio, sia la crescita lineare che quella cubica possono risultare più veloci della crescita esponenziale.
- I fenomeni sottoposti ad una legge di crescita esponenziale non sono infatti caratterizzati da una crescita veloce. Al contrario, in una prima fase si osserva una crescita piuttosto lenta, che poi subisce un'accelerazione improvvisa.
- Nelle crescite di tipo esponenziale all'inizio le cose vanno piano poi accelerano in modo impressionante.



La leggenda degli scacchi

Narra la leggenda che all'inventore degli scacchi, che presentava in dono al re di Persia il suo nuovo gioco, venne chiesto cosa voleva in cambio del suo regalo. Egli chiese soltanto del riso e disse che la quantità si doveva calcolare mettendo un chicco di riso nella prima casella della scacchiera, 2 chicchi nella seconda, 4 nella terza, 8 nella quarta, e così via, in modo da mettere in ogni casella il doppio dei chicchi messi nella casella precedente. La quantità che gli doveva essere consegnata sarebbe stata quella corrispondente alla 64-esima casella. Il re acconsentì prontamente e chiese che fosse portato il riso, rimanendo allibito quando i suoi esperti lo informarono che la quantità di riso richiesta superava di gran lunga le risorse del suo impero! È sufficiente, infatti, un piccolo calcolo: stimando in 1/45 di grammo il peso medio di un chicco di riso, il peso di 2^{63} chicchi (quelli che dovrebbero trovarsi nella 64-esima casella) è di oltre 200 miliardi di tonnellate.

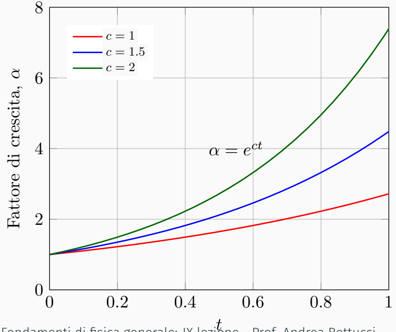
- Quando si parla di crescita esponenziale per fenomeni reali, occorre tener presente che tale tipo di crescita è possibile solo per un determinato, limitato, periodo di tempo.
- Per esempio, in biologia, il numero di microrganismi in un brodo di coltura crescerà esponenzialmente fino a quando non sarà esaurito il nutriente essenziale. Il primo organismo si divide in due organismi figli, che poi si dividono per formarne quattro, che a loro volta si dividono per formarne otto, e così via.
- In fisica, nella reazione nucleare a catena, ogni nucleo di uranio che subisce la fissione (scissione) produce neutroni multipli, ciascuno dei quali può essere assorbito dagli adiacenti nuclei di uranio, facendo sì che essi si scindano a loro volta. Se la probabilità di assorbimento dei neutroni supera la probabilità di fuga dei neutroni stessi, il tasso di produzione dei neutroni e di scissioni di uranio indotte aumenta esponenzialmente, in una reazione incontrollata.

Se una quantità cresce esponenzialmente nel tempo secondo la legge

$$x(t) = Ke^{ct}$$

si può considerare il fattore di crescita α dato dal rapporto tra il valore della grandezza a un generico istante t e quello all'istante iniziale $t = 0$:

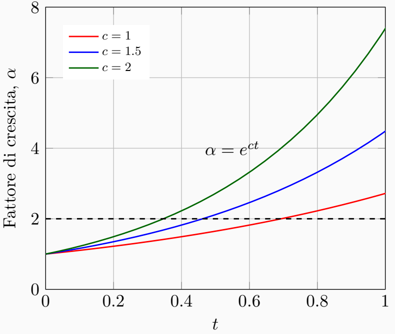
$$\alpha = \frac{x(t)}{x(t=0)} = \frac{x(t)}{K} = \frac{Ke^{ct}}{K} = e^{ct}$$



$$\alpha = e^{ct}$$

Si può allora introdurre il tempo raddoppio T_2 definito come il tempo necessario a raddoppiare il valore della quantità x rispetto al valore iniziale ($t = 0$)

$$2 = e^{cT_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{\ln 2}{c} = \frac{0,693}{c}.$$



Decrescita esponenziale

Un processo di decrescita esponenziale è quello nel quale il tasso di diminuzione di una quantità è proporzionale al valore attuale di quella quantità.
Detta in altri termini: **più è grande la quantità di cui si dispone, più essa decresce**. Se la quantità è piccola cresce poco, se è media diminuisce moderatamente, se è grande decresce molto.

$$\frac{dx}{dt} = -cx \quad \Rightarrow \quad dx = -cx\,dt$$

dove c è una costante positiva: $-c$ che rappresenta la decrescita percentuale di x nell'unità di tempo ($dt = 1$):

$$-c = \frac{dx}{x} \;\; \text{per} \;\; dt = 1$$

e si esprime in $\%$/s.

Ma come varia x nel tempo se decresce esponenzialmente?

$$dx = -cxdt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -cdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -\int cdt$$

e quindi si ha

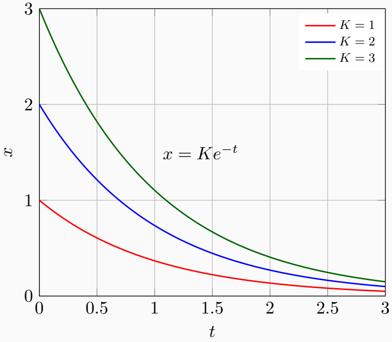
$$\ln x = -ct + \mathrm{cost} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-ct+\mathrm{cost}} = e^{-ct}e^{\mathrm{cost}}$$

cosicché

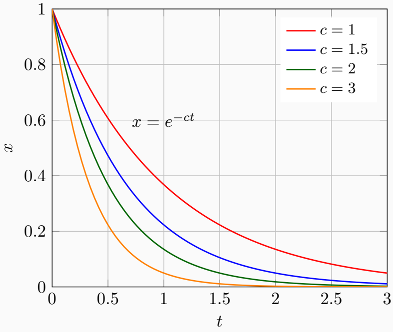
$$x(t) = Ke^{-ct}$$

dove il valore costante $K = e^{\mathrm{cost}}$ rappresenta il valore di x all'istante $t = 0$.

$$x(t) = Ke^{-ct}$$



3
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t
x
$K = 1$
$K = 2$
$K = 3$
$x = Ke^{-t}$



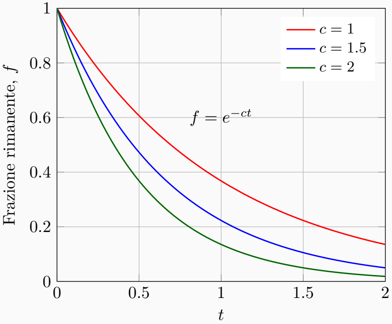
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t
x
$c = 1$
$c = 1.5$
$c = 2$
$c = 3$
$x = e^{-ct}$

Se una quantità decresce esponenzialmente nel tempo secondo la legge

$$x(t) = Ke^{-ct}$$

si può considerare la frazione rimanente f data dal rapporto tra il valore della grandezza a un generico istante t e quello all'istante iniziale $t = 0$:

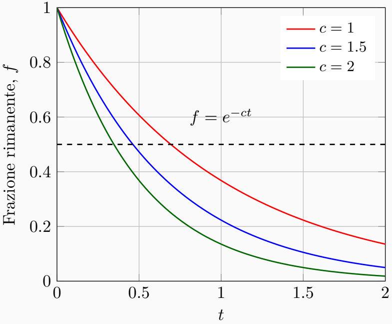
$$f = \frac{x(t)}{x(t=0)} = \frac{x(t)}{K} = \frac{Ke^{-ct}}{K} = e^{-ct}$$



$$f = e^{-ct}$$

Si può allora introdurre il tempo dimezzamento $T_{1/2}$ definito come il tempo necessario a dimezzare il valore della quantità x rispetto al valore iniziale ($t = 0$)

$$\frac{1}{2} = e^{-cT_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -cT_{1/2} \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} = \frac{0,693}{c}.$$



Esempio

L'amoxicillina/acido clavulanico ha un'emivita media di eliminazione di circa un'ora. Supponendo che l'emivita decresca esponenzialmente, quanto ne sarà percentualmente rimasto in circolo nel sangue del paziente dopo $2,5$ ore dalla somministrazione?

Esempio

L'amoxicillina/acido clavulanico ha un'emivita media di eliminazione di circa un'ora. Supponendo che l'emivita decresca esponenzialmente, quanto ne sarà percentualmente rimasto in circolo nel sangue del paziente dopo $2,5$ ore dalla somministrazione?

L'emivita indica il tempo necessario perché, nell'organismo vivente, la quantità o la concentrazione o l'attività di una sostanza, soggetta a trasformazione, decomposizione o decadimento, si riduca alla metà di quella iniziale.

Esempio

L'amoxicillina/acido clavulanico ha un'emivita media di eliminazione di circa un'ora. Supponendo che l'emivita decresca esponenzialmente, quanto ne sarà percentualmente rimasto in circolo nel sangue del paziente dopo $2,5$ ore dalla somministrazione?

L'emivita indica il tempo necessario perché, nell'organismo vivente, la quantità o la concentrazione o l'attività di una sostanza, soggetta a trasformazione, decomposizione o decadimento, si riduca alla metà di quella iniziale.

Se l'emivita varia esponenzialmente, la frazione rimanente varia nel tempo secondo la legge

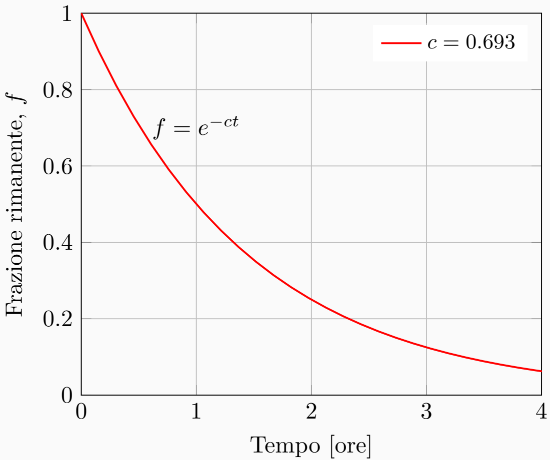
$$f = e^{-ct}$$

e il tempo dimezzamento $T_{1/2}$ vale

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{c}.$$

Nel nostro caso $T_{1/2} = 1\,\mathsf{h}$ e quindi si ha

$$1\,\mathsf{h} = \frac{0,693}{c} \quad \Rightarrow \quad c = 0,693\%/\text{ora}.$$



La percentuale richiesta è data da

$$f = e^{-0,693 \cdot 2,5} \simeq 0,18 = 18\%.$$