

Fondamenti di fisica generale - IV lezione

I parte - Soluzione degli esercizi
della II prova di autovalutazione

II parte - Forza d'attrito

Andrea Bettucci

30 ottobre 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

I parte

Soluzione degli esercizi della II prova di autovalutazione

Esercizio 1

Un bambino di massa $22,5 \text{ kg}$, seduto a $1,20 \text{ m}$ dal centro di una giostra, si muove con una velocità di $1,10 \text{ m/s}$. Determinare (a) l'accelerazione centripeta del bambino e (b) la forza orizzontale netta esercitata sul bambino.

Esercizio 1

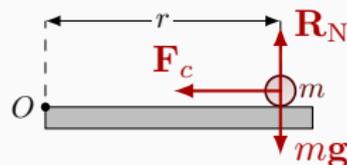
Un bambino di massa $22,5 \text{ kg}$, seduto a $1,20 \text{ m}$ dal centro di una giostra, si muove con una velocità di $1,10 \text{ m/s}$. Determinare (a) l'accelerazione centripeta del bambino e (b) la forza orizzontale netta esercitata sul bambino.

L'accelerazione centripeta del bambino è:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1,10 \text{ m/s})^2}{1,20 \text{ m}} = 1,008 \text{ m/s}^2 \simeq 1,01 \text{ m/s}^2.$$

Per la seconda legge della dinamica, proiettata lungo il raggio della traiettoria circolare, la forza centripeta agente sul bambino vale:

$$F_c = ma_c = (22,5 \text{ kg})(1,008 \text{ m/s}^2) = 22,68 \text{ N} \simeq 22,7 \text{ N}.$$



Esercizio 2

Una sfera di massa $m = 0,55 \text{ kg}$ attaccata all'estremità di una sottile fune inestensibile e priva di massa ruota su una traiettoria circolare di raggio $R = 1,3 \text{ m}$ poggiando su un piano orizzontale liscio. Si determini la massima velocità con la quale può ruotare la sfera sapendo che la corda si spezza quando la tensione supera il valore $T_{\text{max}} = 75 \text{ N}$.

Esercizio 2

Una sfera di massa $m = 0,55 \text{ kg}$ attaccata all'estremità di una sottile fune inestensibile e priva di massa ruota su una traiettoria circolare di raggio $R = 1,3 \text{ m}$ poggiando su un piano orizzontale liscio. Si determini la massima velocità con la quale può ruotare la sfera sapendo che la corda si spezza quando la tensione supera il valore $T_{\max} = 75 \text{ N}$.

La forza centripeta è fornita dalla forza (tensione) della fune che, per il secondo principio della dinamica è:

$$F_c = m \frac{v^2}{r}.$$

Poichè la tensione non può superare il valore T_{\max} allora si ha:

$$T_{\max} = m \frac{v_{\max}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = 13,31 \text{ m/s} \simeq 13 \text{ m/s}.$$

Esercizio 3

Quanti giri al minuto deve fare una centrifuga se una particella a distanza $d = 7 \text{ cm}$ dall'asse di rotazione deve subire un'accelerazione centrifuga pari a 125000 volte l'accelerazione di gravità g ?

Esercizio 3

Quanti giri al minuto deve fare una centrifuga se una particella a distanza $d = 7 \text{ cm}$ dall'asse di rotazione deve subire un'accelerazione centrifuga pari a 125000 volte l'accelerazione di gravità g ?

Poiché l'accelerazione centrifuga vale $a_c = \omega^2 r$ ne deriva che la velocità angolare della centrifuga deve essere:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}} = \sqrt{\frac{125 \times 10^3 g}{d}} = \sqrt{\frac{(125 \times 10^3)(9,8 \text{ m/s}^2)}{7 \times 10^{-2} \text{ m}}} = 4,18 \times 10^3 \text{ rad/s.}$$

La frequenza di rotazione è:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4,18 \times 10^3 \text{ rad/s}}{2 \cdot 3,14} \simeq 666 \text{ giri al secondo}$$

che corrispondono a circa $3,99 \times 10^4$ giri al minuto.

Esercizio 4

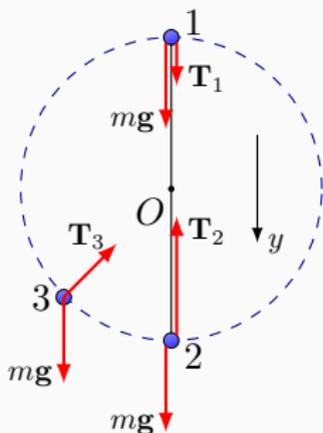
Una sfera di massa $m = 0,15 \text{ kg}$ attaccata all'estremità di una corda inestensibile di massa trascurabile e lunga $\ell = 1,10 \text{ m}$ viene fatta oscillare in un cerchio verticale. (a) Determinare la velocità minima che la sfera deve avere nella parte superiore del suo arco in modo che essa continui a muoversi in circolo. (b) Calcolare la tensione della corda alla base dell'arco, supponendo che la sfera si muova al doppio della velocità della parte (a).

Esercizio 4

Una sfera di massa $m = 0,15 \text{ kg}$ attaccata all'estremità di una corda inestensibile di massa trascurabile e lunga $\ell = 1,10 \text{ m}$ viene fatta oscillare in un cerchio verticale. (a) Determinare la velocità minima che la sfera deve avere nella parte superiore del suo arco in modo che essa continui a muoversi in circolo. (b) Calcolare la tensione della corda alla base dell'arco, supponendo che la sfera si muova al doppio della velocità della parte (a).

La sfera si muove lungo una traiettoria circolare posta in un piano verticale, ma il moto non è uniforme a causa della forza peso. Il raggio è assunto costante, ma il modulo della velocità è diverso da punto a punto. L'accelerazione del moto ha sia una componente centripeta (che modifica la direzione del vettore velocità), sia una componente tangenziale (che cambia il modulo della velocità).

Solamente nei punti superiore 1 e inferiore 2 della traiettoria le forze agenti sulla massa (peso mg e tensione della fune \mathbf{T}) sono tutte dirette radialmente: in tali punti l'accelerazione deve essere tutta centripeta. In tutti gli altri punti è presente sia accelerazione centripeta che tangenziale (ad esempio, nel punto 3).

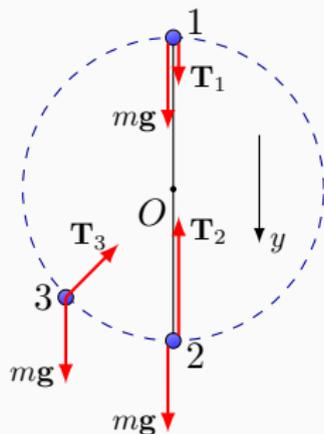


(a) La seconda legge della dinamica quando la sfera si trova nel punto 1 proiettata lungo la verticale orientata verso il basso si scrive

$$mg + T_1 = m \frac{v_1^2}{\ell}$$

Minore è la velocità v_1 con la quale la sfera passa per il punto 1, minore è la tensione del filo in quel punto.

D'altra parte l'esercizio chiede la velocità **minima** che la sfera deve avere nella parte superiore del suo arco in modo che la palla continui a muoversi in circolo. Ma il moto è circolare solo se la corda è sotto tensione: se la tensione T_1 scompare (perché v_1 è troppo piccola) la corda può afflosciarsi e il moto della sfera non sarà più circolare.



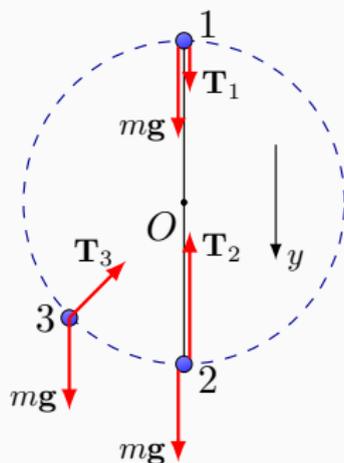
Pertanto, il valore minimo di v_1 si avrà quando $T_1 = 0$: per tale valore minimo della velocità è sufficiente la sola forza peso per fornire la necessaria forza centripeta. La seconda legge della dinamica diviene allora:

$$mg = m \frac{v_{1\text{minima}}^2}{\ell} \Rightarrow v_{1\text{minima}} = \sqrt{g\ell} = 3,28 \text{ m/s.}$$

Questa è la velocità minima della sfera sulla sommità della traiettoria che garantisce alla sfera di muoversi di moto circolare.

(b) Nel punto più basso della traiettoria, le forze sono dirette come mostrato nella figura a lato. La seconda legge della dinamica per la sfera quando si trova nel punto 2, proiettata lungo la verticale orientata verso il basso si scrive:

$$-T_2 + mg = -m \frac{v_2^2}{\ell}$$



Ma, se come richiesto dall'esercizio, se deve essere $v_2 = 2v_{1\text{minima}}$ dalla precedente relazione si ricava

$$T_2 = mg + m \frac{(2v_{1\text{minima}})^2}{\ell} \Rightarrow T_2 = 7,35 \text{ N.}$$

Esercizio 5

Qual è l'intensità dell'accelerazione di un granello di argilla posto sul bordo di un tornio da vasaio che gira a 45 giri al minuto se il diametro della ruota è di 35 cm?

Esercizio 5

Qual è l'intensità dell'accelerazione di un granello di argilla posto sul bordo di un tornio da vasaio che gira a 45 giri al minuto se il diametro della ruota è di 35 cm?

Il periodo del moto del granello, ovvero il tempo che impiega a fare un giro, è:

$$T = \frac{60 \text{ s}}{45 \text{ giri}} = 1,333 \text{ secondi/giro.}$$

La velocità con cui il granello si muove è:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 0,8249 \text{ m/s}$$

e, di conseguenza, l'accelerazione centripeta vale

$$a_c = \frac{v^2}{r} = 3,888 \text{ m/s}^2 \simeq 3,9 \text{ m/s}^2.$$

Esercizio 6

Un secchio di massa $m = 2,0 \text{ kg}$ viene fatto roteare in un cerchio verticale di raggio $r = 1,20 \text{ m}$. Nel punto più basso del suo moto la tensione nella fune che sostiene il secchio è $25,0 \text{ N}$. (a) Si determini la velocità del secchio nel punto più basso della sua traiettoria. (b) A quale velocità minima deve muoversi il secchio nella parte superiore della traiettoria circolare in modo che la corda non si allenti?

Esercizio 6

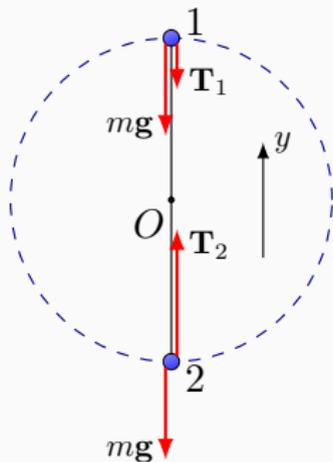
Un secchio di massa $m = 2,0 \text{ kg}$ viene fatto roteare in un cerchio verticale di raggio $r = 1,20 \text{ m}$. Nel punto più basso del suo moto la tensione nella fune che sostiene il secchio è $25,0 \text{ N}$. (a) Si determini la velocità del secchio nel punto più basso della sua traiettoria. (b) A quale velocità minima deve muoversi il secchio nella parte superiore della traiettoria circolare in modo che la corda non si allenti?

(a) Nel punto più basso della traiettoria, 2, la seconda legge della dinamica proiettata lungo l'asse y assume la forma:

$$T_2 - mg = m \frac{v_2^2}{r}$$

ottenendo così

$$v_2 = \sqrt{\frac{r(T_2 - mg)}{m}} = 1,8 \text{ m/s.}$$



(b) Nel punto più alto della traiettoria, 1, la seconda legge della dinamica proiettata lungo l'asse y assume la forma:

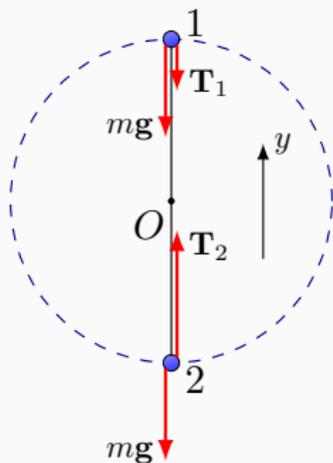
$$-T_1 - mg = -m \frac{v_1^2}{r}$$

cosicché si trova

$$v_1 = \sqrt{\frac{r(T_1 + mg)}{m}}$$

Se nel punto 1 la corda non si deve allentare, il valore minimo di v_1 per il quale accade ciò è quello per il quale $T_1 = 0$; si trova allora

$$v_1 = \sqrt{\frac{r(0 + mg)}{m}} = \sqrt{rg} = 3,43 \text{ m/s.}$$



Esercizio 7

Un corpo di massa $m = 0,5 \text{ kg}$ si muove di moto armonico con una frequenza $f = 2 \text{ Hz}$ e un'ampiezza $A = 8 \text{ mm}$. Si determini: (a) la massima velocità e accelerazione del corpo; (b) la massima forza cui il corpo è soggetto.

Esercizio 7

Un corpo di massa $m = 0,5 \text{ kg}$ si muove di moto armonico con una frequenza $f = 2 \text{ Hz}$ e un'ampiezza $A = 8 \text{ mm}$. Si determini: (a) la massima velocità e accelerazione del corpo; (b) la massima forza cui il corpo è soggetto.

La pulsazione del moto è $\omega = 2\pi f = 4\pi \text{ rad/s}$. Poiché per un generico moto armonico lungo l'asse x si ha:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

si ha:

$$v_{\max} = \omega A = 0,01 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad a_{\max} = \omega^2 A = 1,25 \text{ m/s}^2.$$

Dalla seconda legge della dinamica si ricava

$$F_{\max} = ma_{\max} = 0,63 \text{ N}.$$

Esercizio 8

Un corpo che si muove di moto armonico possiede una velocità massima $v_{\max} = 1,6 \text{ m/s}$ e un'accelerazione massima $a_{\max} = 8\pi \text{ m/s}^2$. Si determinino l'ampiezza A e il periodo T del moto.

Esercizio 8

Un corpo che si muove di moto armonico possiede una velocità massima $v_{\max} = 1,6 \text{ m/s}$ e un'accelerazione massima $a_{\max} = 8\pi \text{ m/s}^2$. Si determinino l'ampiezza A e il periodo T del moto.

Poiché per un generico moto armonico lungo l'asse x si ha:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

è possibile esprimere a_{\max} e v_{\max} in funzione di A e T :

$$a_{\max} = 8\pi \text{ m/s}^2 = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$$

$$v_{\max} = 1,6 \text{ m/s} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A.$$

Si ha quindi il seguente sistema di due equazioni nelle incognite A e T :

$$\begin{cases} \frac{4\pi^2}{T^2}A = 8\pi \\ 1.6 = \frac{2\pi}{T}A. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$A = 1,02 \text{ m} \quad \text{e} \quad T = 0,4 \text{ s}$$

Il parte

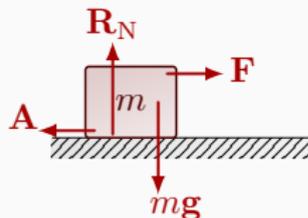
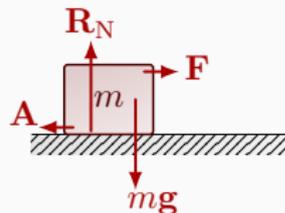
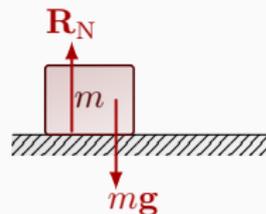
Forza d'attrito

Se si applica una forza \mathbf{F} parallelamente alla superficie di appoggio si vedrà che il corpo rimane in quiete fino a che l'intensità della forza non supera un valore che si scopre sperimentalmente essere proporzionale all'intensità della reazione normale esercitata dal vincolo R_N .

$$F \leq \mu_s R_N$$

Il vincolo può quindi generare una reazione che oltre ad avere la componente normale \mathbf{R}_N ha la componente tangenziale \mathbf{A} costituente la **forza d'attrito statico** di intensità proporzionale a R_N :

$$A \leq \mu_s R_N.$$

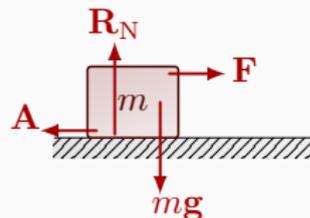
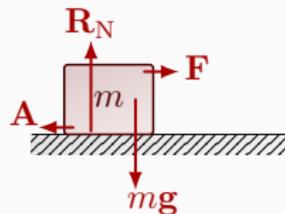
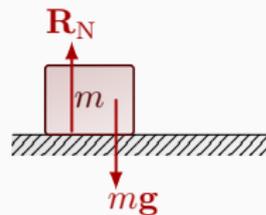


La forza di attrito statico \mathbf{A} cresce con \mathbf{F} e la equilibra fino a che F non supera il valore $\mu_s R_N$, nel qual caso essa assume il valore massimo

$$A_{\max} = \mu_s R_N.$$

Il coefficiente μ_s è una grandezza adimensionata e prende il nome di **coefficiente di attrito statico** o **di primo distacco**.

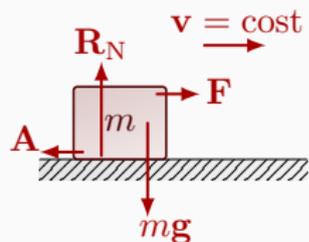
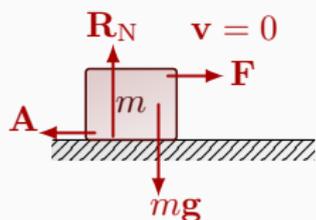
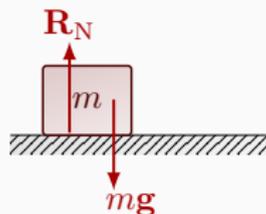
$$A \leq \mu_s R_N.$$



Una volta che il blocco si è messo in moto ($F \geq \mu_s R_N$), si riscontra sperimentalmente che per mantenerlo in moto rettilineo uniforme è sufficiente una forza di intensità minore di $\mu_s R_N$, ovvero si ha

$$F = \mu_d R_N.$$

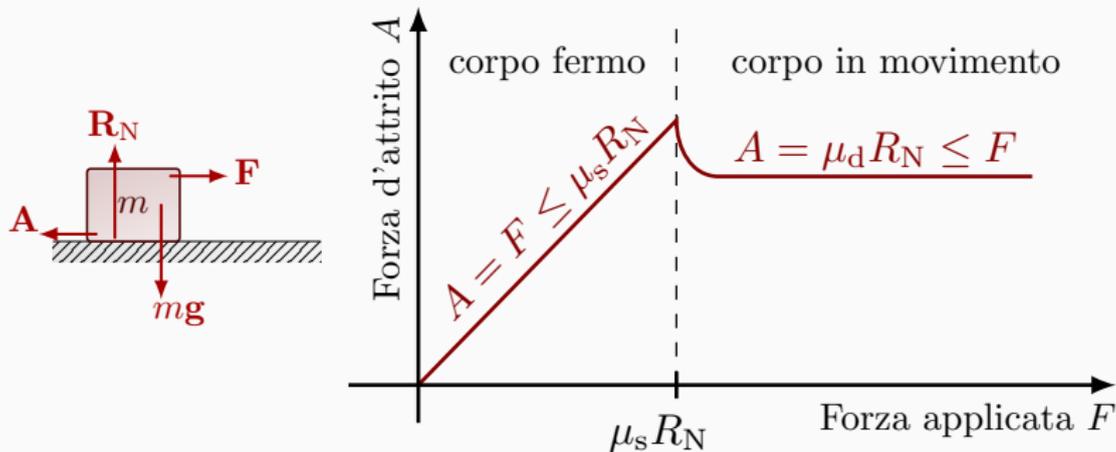
con $\mu_d < \mu_s$ dove il coefficiente μ_d prende il nome di **coefficiente di attrito dinamico** o **attrito radente**.



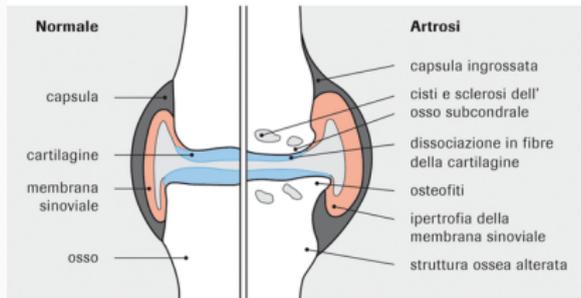
I coefficienti di attrito statico e dinamico decrescono rapidamente al diminuire della rugosità delle superfici a contatto, dipendono fortemente dai materiali a contatto, dalla temperatura, dalla presenza di materiali estranei e in particolare dalla presenza di pellicole liquide.

Materiali a contatto	Stato della superficie	μ_s	μ_d
Legno su legno	secco	0,52	0,50 ÷ 0,25
	saponato	0,30	0,20
Acciaio su legno	secco	0,62	0,60 ÷ 0,50
	saponato		0,15
Vetro su vetro	secco	1,1	
Ghisa su ghisa	secco	0,94	

Modulo della forza di attrito in funzione della forza applicata a un oggetto di massa m inizialmente in quiete



NELLE ARTICOLAZIONI DEL CORPO UMANO L'ATTRITO TRA LE OSSA È RIDOTTO DALLE CARTILAGINI

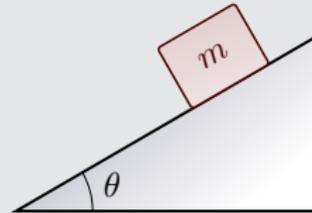


L'attrito tra le soles delle nostre scarpe e il suolo
permette di camminare.



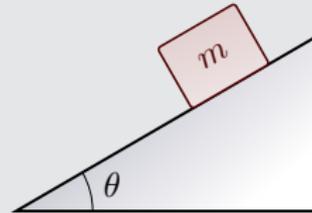
Esercizio

Un blocco di massa m si trova fermo sopra un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Si determini il massimo valore di θ per il quale il corpo rimane fermo, supponendo noto il coefficiente di attrito statico μ_s tra blocco e piano.



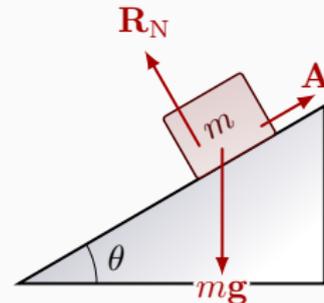
Esercizio

Un blocco di massa m si trova fermo sopra un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Si determini il massimo valore di θ per il quale il corpo rimane fermo, supponendo noto il coefficiente di attrito statico μ_s tra blocco e piano.



Se il corpo è fermo e deve rimanere fermo, il valore massimo di θ è quello per il quale è nullo il risultante delle forze ad esso applicate:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{A} = 0$$

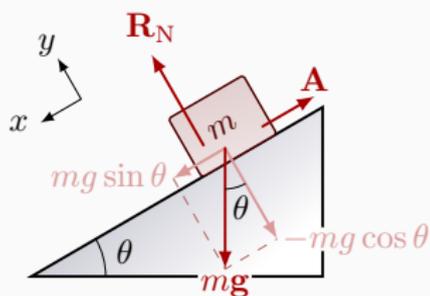


Perché la forza di attrito è diretta come in figura? Come si fa, in generale, a capire come è diretta la forza di attrito?

Se non ci fosse l'attrito, la componente della forza peso parallela al piano farebbe scivolare il corpo: la forza di attrito deve opporsi a tale movimento.

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{cases} x) & mg \sin \theta - A = 0 \\ y) & R_N - mg \cos \theta = 0. \end{cases}$$

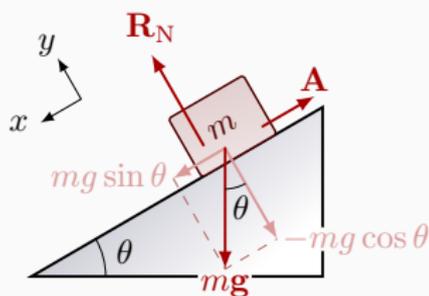


Se non ci fosse l'attrito, la componente della forza peso parallela al piano farebbe scivolare il corpo: la forza di attrito deve opporsi a tale movimento.

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{cases} x) & mg \sin \theta - A = 0 \\ y) & R_N - mg \cos \theta = 0. \end{cases}$$

$$R_N - mg \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg \cos \theta$$



Se non ci fosse l'attrito, la componente della forza peso parallela al piano farebbe scivolare il corpo: la forza di attrito deve opporsi a tale movimento.

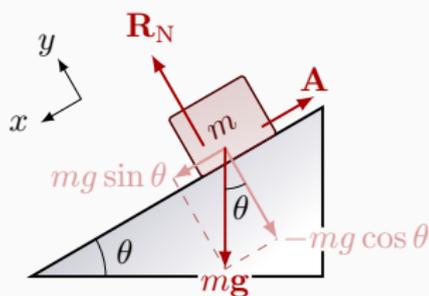
$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{A} = 0$$

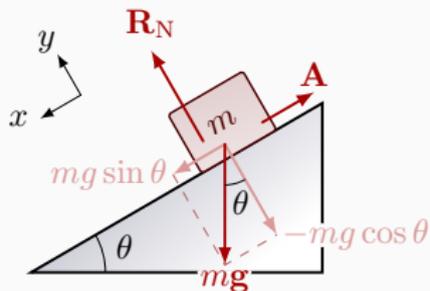
$$\begin{cases} x) & mg \sin \theta - A = 0 \\ y) & R_N - mg \cos \theta = 0. \end{cases}$$

$$R_N - mg \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg \cos \theta$$

Il valore massimo dell'angolo di inclinazione del piano θ_{\max} per il quale la massa m non si muove è quello per il quale l'attrito statico assume il valore massimo

$$A_{\max} = \mu_s R_N \quad \Rightarrow \quad A_{\max} = \mu_s mg \cos \theta$$





Deve quindi essere

$$mg \sin \theta_{\max} - A_{\max} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg \sin \theta_{\max} = \mu_s mg \cos \theta_{\max}$$

da cui si ricava

$$\tan \theta_{\max} = \mu_s \quad \Rightarrow \quad \theta_{\max} = \arctan \mu_s.$$

Per $\theta \leq \theta_{\max}$ il corpo non scivola lungo il piano.

Esercizio

Una mosca di massa $m = 0,2 \text{ g}$ si trova ferma a una distanza $d = 12 \text{ cm}$ dal centro di un piatto di giradischi che ruota eseguendo 33 giri al minuto. (a) Qual è l'intensità della forza centripeta agente sulla mosca? (b) Quale deve essere il minimo coefficiente di attrito statico tra il piatto del giradischi e la mosca affinché quest'ultima non scivoli?

Esercizio

Una mosca di massa $m = 0,2 \text{ g}$ si trova ferma a una distanza $d = 12 \text{ cm}$ dal centro di un piatto di giradischi che ruota eseguendo 33 giri al minuto. (a) Qual è l'intensità della forza centripeta agente sulla mosca? (b) Quale deve essere il minimo coefficiente di attrito statico tra il piatto del giradischi e la mosca affinché quest'ultima non scivoli?

(a) Se la mosca esegue una traiettoria circolare 33 volte in un minuto, la frequenza del moto è:

$$\nu = \frac{33 \text{ giri}}{60 \text{ secondi}} = 0,55 \text{ Hz.}$$

Il periodo del moto e la velocità angolare della mosca sono:

$$T = \frac{1}{\nu} \simeq 1,82 \text{ s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 3,45 \text{ rad/s.}$$

Il moto della mosca è circolare uniforme perché la velocità angolare è costante. L'accelerazione centripeta della mosca è

$$a_c = \omega^2 d = (3,45 \text{ rad/s})^2 \cdot (0,12 \text{ m}) \simeq 1,43 \text{ m/s}^2.$$

La forza centripeta cui è soggetta la mosca è:

$$F_c = ma_c = (0,2 \times 10^{-3} \text{ kg}) \cdot (1,43 \text{ m/s}^2) \simeq 2,86 \times 10^{-4} \text{ N}.$$

Il moto della mosca è circolare uniforme perché la velocità angolare è costante. L'accelerazione centripeta della mosca è

$$a_c = \omega^2 d = (3,45 \text{ rad/s})^2 \cdot (0,12 \text{ m}) \simeq 1,43 \text{ m/s}^2.$$

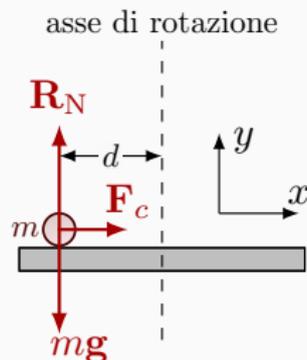
La forza centripeta cui è soggetta la mosca è:

$$F_c = ma_c = (0,2 \times 10^{-3} \text{ kg}) \cdot (1,43 \text{ m/s}^2) \simeq 2,86 \times 10^{-4} \text{ N}.$$

(b) Dal punto di vista di un osservatore solidale con il pavimento (riferimento xy), le forze che agiscono sulla mosca, oltre al peso mg e a \mathbf{R}_N , sono la forza centripeta \mathbf{F}_c . Tale osservatore scriverà:

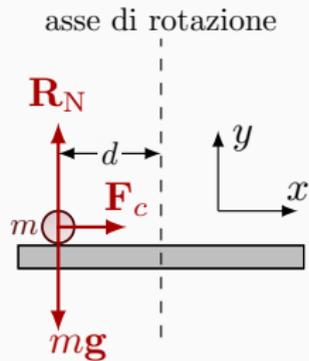
$$mg + \mathbf{R}_N + \mathbf{F}_c = m\mathbf{a}$$

dove l'accelerazione \mathbf{a} è centripeta muovendosi la mosca di moto circolare uniforme.



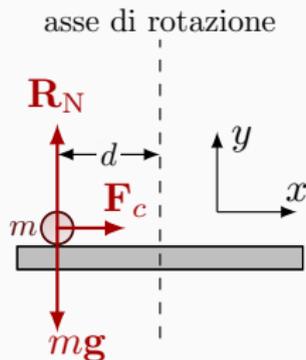
$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{F}_c = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) & F_c = ma_c \\ y) & R_N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_N = mg \end{cases}$$



$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{F}_c = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} x) & F_c = ma_c \\ y) & R_N - mg = 0 \Rightarrow R_N = mg \end{cases}$$



La forza centripeta è fornita dall'attrito statico. È l'attrito statico l'invisibile filo che vincola la mosca a ruotare attorno alla circonferenza di raggio d generando l'accelerazione centripeta. Poichè l'attrito statico ha un valore massimo allora deve essere:

$$F_c \leq A_{\max} = \mu_s mg \Rightarrow \mu_s mg \geq ma_c$$

e quindi si ha

$$\mu_s \geq \frac{a_c}{g} \simeq 0,146.$$

Se il coefficiente di attrito statico è inferiore a 0,146 la mosca slitterà sul piatto del giradischi.

L'esercizio può anche essere risolto rispetto a un osservatore solidale con il piatto del giradischi (riferimento $x'y'$), ovvero dal punto di vista della mosca. Dal punto di vista della mosca, che si trova su una piattaforma che ruota, il suo essere ferma implica che sia nullo il risultante delle forze su di essa agenti. Le forze, oltre al peso $m\mathbf{g}$ e a \mathbf{R}_N , sono la forza centrifuga \mathbf{F}_{ga} e l'attrito statico \mathbf{A} che a essa si oppone. Si scriverà quindi

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{F}_{ga} + \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{cases} x') & -F_{ga} + A = 0 \\ y') & R_N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow R_N = mg$$

Ma la forza centrifuga non può superare il valore massimo dell'attrito statico:

$$F_{ga} = m\omega^2 d \leq \mu_s mg \Rightarrow \mu_s \geq \frac{\omega^2 d}{g} \simeq 0,146.$$

