Fondamenti di fisica generale - III lezione

I parte - Moto armonico

II parte - I principi della dinamica, forza peso, reazioni vincolari

Andrea Bettucci

23 ottobre 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

I parte

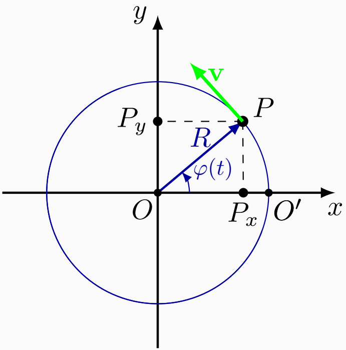
Moto armonico

Un punto P si muove di moto circolare uniforme lungo la circonferenza di raggio R,

$$\varphi(t) = \omega t \qquad \text{o} \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

dove ω è la velocità angolare definita come

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}.$$

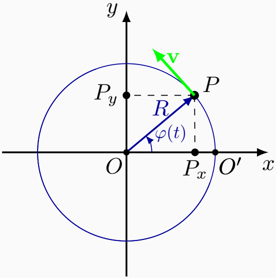


Mentre P si muove di moto circolare uniforme, come si muovono le proiezioni P_x proiezione di P sull'asse x e P_y proiezione di P sull'asse y?

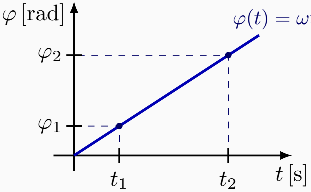
P_x sia P_y si muovono su una traiettoria rettilinea compresa tra $-R$ e $+R$ con legge oraria cosinusoidale (sinusoidale)

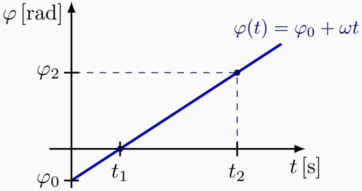
$$x(t) = OP_x = R\cos\varphi(t) = R\cos\omega t$$

$$y(t) = OP_y = R\sin\varphi(t) = R\sin\omega t$$



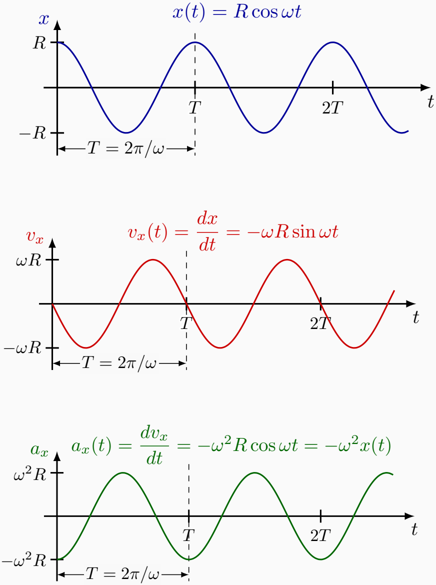
con **R ampiezza del moto, ω pulsazione del moto** e **$\varphi(t) = \omega t$ angolo di fase.**



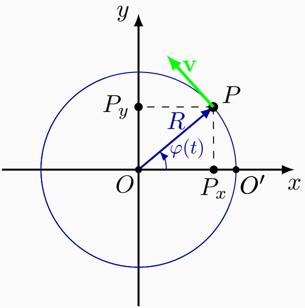


Un moto armonico è un moto
che avviene su traiettoria rettilinea
con legge oraria cosinusoidale (o sinusoidale)

Moto di P_x

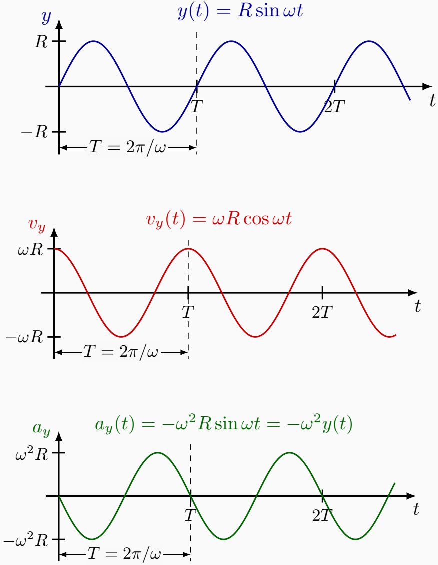


$x(t) = R\cos\omega t$
x
R
$-R$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega$
$v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = -\omega R\sin\omega t$
v_x
ωR
$-\omega R$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega$
$a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt} = -\omega^2 R\cos\omega t = -\omega^2 x(t)$
a_x
$\omega^2 R$
$-\omega^2 R$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega$

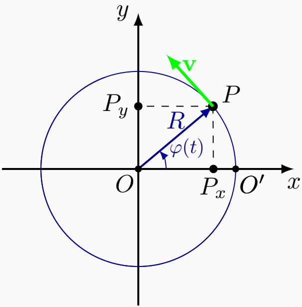


y
$\mathbf{v}$
P
P_y
R
$\varphi(t)$
O
P_x
O'
x

Moto di P_y

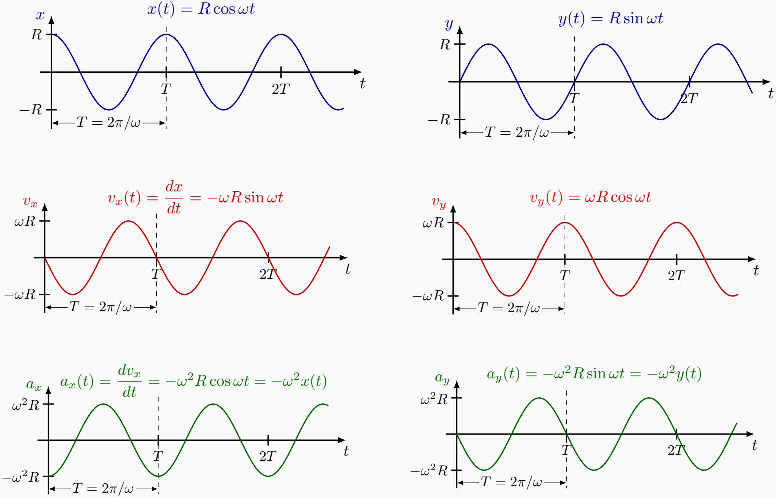


$y(t) = R\sin\omega t$
y
R
$-R$
t
T
$2T$
$T = 2\pi/\omega$
$v_y(t) = \omega R\cos\omega t$
v_y
ωR
$-\omega R$
t
T
$2T$
$T = 2\pi/\omega$
$a_y(t) = -\omega^2 R\sin\omega t = -\omega^2 y(t)$
a_y
$\omega^2 R$
$-\omega^2 R$
t
T
$2T$
$T = 2\pi/\omega$



y
$\mathbf{v}$
P
P_y
R
$\varphi(t)$
O
P_x
O'
x

Moto di P_x Moto di P_y



- P_x e P_y si muovono di moto armonico con la medesima ampiezza e periodo. Il moto di P_y è sfasato in ritardo $T/4$ rispetto a quello di P_x.

Esercizio

Una massa puntiforme esegue un moto armonico lungo l'asse x con una frequenza $\nu = 5\,\mathrm{Hz}$. All'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ il suo spostamento è $x(0) = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ e la sua velocità è $v(0) = -314\,\mathrm{cm/s}$. (a) Si determini l'espressione della legge oraria del moto $x(t)$, della velocità $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$; (b) si determini il valore massimo dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione.

Esercizio

Una massa puntiforme esegue un moto armonico lungo l'asse x con una frequenza $\nu = 5\,\text{Hz}$. All'istante $t = 0\,\text{s}$ il suo spostamento è $x(0) = 10{,}0\,\text{cm}$ e la sua velocità è $v(0) = -314\,\text{cm/s}$. (*a*) Si determini l'espressione della legge oraria del moto $x(t)$, della velocità $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$; (*b*) si determini il valore massimo dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione.

Un generico moto armonico lungo l'asse x si ha:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

dove la pulsazione ω è legata alla frequenza ν del moto dalla relazione $\omega = 2\pi\nu$ e quindi

$$\omega = 2\pi\nu = 10\pi \text{ rad/s}.$$

(a) Per le condizioni date deve essere:

$$\begin{cases} x(0) &= A\cos\varphi_0 \\ \\ v(0) &= -2\pi\nu A\sin\varphi_0 . \end{cases}$$

Per risolvere il sistema rispetto alle due incognite A (ampiezza del moto) e φ_0 (fase iniziale del moto), si osservi che:

$$\begin{cases} \cos\varphi_0 &= \dfrac{x(0)}{A} \\ \\ \sin\varphi_0 &= -\dfrac{v(0)}{2\pi\nu A} \end{cases} \tag{1}$$

Quadrando e sommando membro a membro le due equazioni del sistema (1), tenendo presente che $\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$, si ottiene per A l'espressione

$$A = \frac{\sqrt{[2\pi\nu x(0)]^2 + [v(0)]^2}}{2\pi\nu}$$

Sostituendo i valori numerici $x(0) = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ e $v(0) = -314\,\mathrm{cm/s}$ si ottiene:

$$A = 14{,}1\,\mathrm{cm}.$$

Per determinare il valore di φ_0 è sufficiente fare il rapporto membro a membro delle equazioni del sistema (1), si ricava:

$$\varphi_0 = \arctan\left[-\frac{v(0)}{2\pi\nu x(0)}\right] \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad} = 45°.$$

In conclusione si ha:

$$x(t) = (14{,}1\,\mathrm{cm})\cos(10\pi t + \pi/4) \qquad v(t) = -(141\pi\ \mathrm{cm/s})\sin(10\pi t + \pi/4)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) = -(10\pi)^2(14{,}1\,\mathrm{cm/s^2})\cos(10\pi t + \pi/4)$$

(b) Prendendo le espressioni ora trovate per lo spostamento, la velocità e l'accelerazione, si trova:

$$x(t) = (14{,}1\,\mathrm{cm})\cos(10\pi t + \pi/4) \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{max}} = 14{,}1\,\mathrm{cm}$$

$$v(t) = -(141\pi\ \mathrm{cm/s})\sin(10\pi t + \pi/4) \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = 444\,\mathrm{cm/s}$$

$$a(t) = -(10\pi)^2(14{,}1\,\mathrm{cm/s^2})\cos(10\pi t + \pi/4) \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{max}} = 1{,}40\times 10^4\,\mathrm{cm/s^2}$$

II parte

I principi della dinamica

- Ogni causa che determina una variazione di velocità è detta forza.
- Le forze sono causa di accelerazione.
- Le forze sono grandezze fisiche vettoriali.

PRINCIPI DELLA DINAMICA

1. Un corpo non sottoposto a forze ha accelerazione nulla (Principio di inerzia).
2. Un corpo di massa m sottoposto a una forza (o a un risultante di forze) $\mathbf{F}$ subisce un'accelerazione $\mathbf{a}$ eguale a:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

3. Se una corpo A esercita una forza $\mathbf{F}$ su un corpo B, allora il corpo B esercita sul corpo A una forza pari a $-\mathbf{F}$ (Principio di azione e reazione).

Se sono note le forze che agiscono su un corpo, la seconda legge della dinamica permette di determinare l’accelerazione del corpo

Se è nota l’accelerazione di un corpo, la seconda legge della dinamica permette di determinare la risultante delle forze su di esso agenti.

Esercizio

Qual è la forza $\boldsymbol{F}$ che una persona deve esercitare all'estremità di una sottile fune inestensibile di lunghezza ℓ alla cui estremità opposta è attaccata una massa m se vuole farla ruotare di moto circolare uniforme su un piano orizzontale liscio con un periodo T? ($\ell = 0{,}60\,\mathrm{m}$; $m = 0{,}15\,\mathrm{kg}$; $T = 0{,}50\,\mathrm{s}$; si trascuri la massa della fune.)

Esercizio

Qual è la forza $\boldsymbol{F}$ che una persona deve esercitare all'estremità di una sottile fune inestensibile di lunghezza ℓ alla cui estremità opposta è attaccata una massa m se vuole farla ruotare di moto circolare uniforme su un piano orizzontale liscio con un periodo T? ($\ell = 0{,}60\,\mathrm{m}$; $m = 0{,}15\,\mathrm{kg}$; $T = 0{,}50\,\mathrm{s}$; si trascuri la massa della fune.)

Se si applica alla massa m la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e la si proietta nella direzione radiale si ha:

$$F = m a_{\text{centripeta}} = m\omega^2 \ell$$

dove

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{0{,}50\,\mathrm{s}} \simeq 12{,}57\,\mathrm{rad/s}$$

e quindi si ha:

$$F = 0{,}15\,\mathrm{kg} \cdot (12{,}57\,\mathrm{rad/s})^2 \cdot (0{,}60\,\mathrm{m}) \simeq 14{,}22\,\mathrm{N}.$$

FORZA PESO

- È la forza con la quale la Terra attrae tutti i corpi dotati di massa m che si trovano sulla sua superficie o in prossimità di essa.
- In prossimità della Terra, tutti i corpi dotati di massa sono sottoposti a un'accelerazione costante $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ diretta verso il terreno perpendicolarmente a esso.
- Per la seconda legge della dinamica si può allora scrivere:

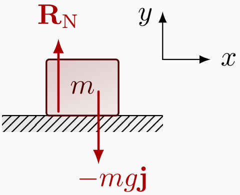
$$\mathbf{F}_{\text{peso}} = m\mathbf{g}$$

dove $\mathbf{g}$ è un vettore di modulo pari a $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ diretto verso il terreno perpendicolarmente a esso.

- $\mathbf{g}$ è detta accelerazione di gravità.

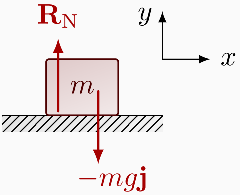
REAZIONI VINCOLARI

- Sono forze che si originano in relazione a limitazioni (vincoli) imposte al movimento di un corpo da corpi circostanti.
- Ad esempio: se corpo è vincolato a non attraversare un piano, le reazioni vincolari si originano per resistere ad azioni tendenti a spingere il corpo oltre il piano, mentre nessuna forza avviene se il moto avviene nel semispazio consentito.



REAZIONI VINCOLARI

- Sono forze che si originano in relazione a limitazioni (vincoli) imposte al movimento di un corpo da corpi circostanti.
- Ad esempio: se corpo è vincolato a non attraversare un piano, le reazioni vincolari si originano per resistere ad azioni tendenti a spingere il corpo oltre il piano, mentre nessuna forza avviene se il moto avviene nel semispazio consentito.

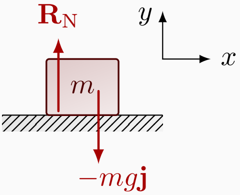


$$\mathbf{R}_\mathrm{N} - mg\mathbf{j} = m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_\mathrm{N} = mg\mathbf{j}$$

ovvero, proiettando la seconda legge della dinamica lungo l'asse y si ha:

$$R_\mathrm{N} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{N} = mg.$$

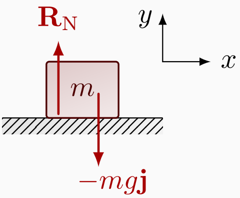
LE REAZIONI VINCOLARI SONO GRANDI QUANTO SI VUOLE IN DIREZIONE NORMALE AL VINCOLO



$$\mathbf{R}_{\mathrm{N}} - mg\mathbf{j} = m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\mathrm{N}} = mg\mathbf{j}$$

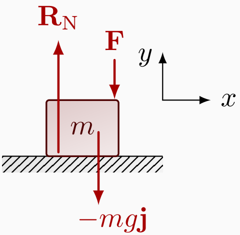
$$y) \;\; R_{\mathrm{N}} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{N}} = mg.$$

LE REAZIONI VINCOLARI SONO GRANDI QUANTO SI VUOLE IN DIREZIONE NORMALE AL VINCOLO



$$\mathbf{R}_\mathrm{N} - mg\mathbf{j} = m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_\mathrm{N} = mg\mathbf{j}$$

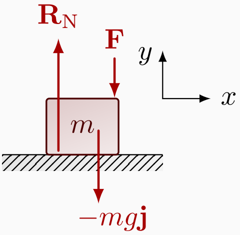
$$y) \;\; R_\mathrm{N} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{N} = mg.$$



$$\mathbf{R}_\mathrm{N} - mg\mathbf{j} + \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_\mathrm{N} = mg\mathbf{j} - \mathbf{F}$$

$$y) \;\; R_\mathrm{N} - mg - F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{N} = mg + F.$$

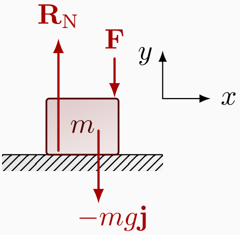
LE REAZIONI VINCOLARI CAMBIANO AL VARIARE DELLA FORZA CHE PREME PERPENDICOLARMENTE AL VINCOLO



$$\mathbf{R}_{\mathrm{N}} - mg\mathbf{j} + \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\mathrm{N}} = mg\mathbf{j} - \mathbf{F}$$

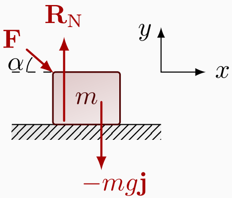
$$y) \;\; R_{\mathrm{N}} - mg - F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{N}} = mg + F.$$

LE REAZIONI VINCOLARI CAMBIANO AL VARIARE DELLA FORZA CHE PREME PERPENDICOLARMENTE AL VINCOLO



$$\mathbf{R}_\mathrm{N} - mg\mathbf{j} + \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_\mathrm{N} = mg\mathbf{j} - \mathbf{F}$$

$$y) \;\; R_\mathrm{N} - mg - F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{N} = mg + F.$$



$$\mathbf{R}_\mathrm{N} - mg\mathbf{j} + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} y) & R_\mathrm{N} - mg - F\sin\alpha = 0 \\ x) & F\cos\alpha = ma_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y) & R_\mathrm{N} = mg + F\sin\alpha \\ x) & a_x = \dfrac{F\cos\alpha}{m}. \end{cases}$$

Esercizio

Un oggetto di massa m si trova poggiato sul pavimento di un ascensore. Si determini la reazione vincolare esercitata dal pavimento sull'oggetto nei due seguenti casi: (*a*) l'ascensore sale con accelerazione costante $\mathbf{a}$; (*b*) l'ascensore scende con accelerazione costante $\mathbf{a}$.

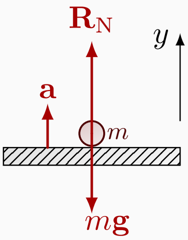
Esercizio

Un oggetto di massa m si trova poggiato sul pavimento di un ascensore. Si determini la reazione vincolare esercitata dal pavimento sull'oggetto nei due seguenti casi: (*a*) l'ascensore sale con accelerazione costante $\mathbf{a}$; (*b*) l'ascensore scende con accelerazione costante $\mathbf{a}$.

(*a*) Se l'ascensore sale con accelerazione costante $\mathbf{a}$, un osservatore a terra vedrà salire la massa m con accelerazione $\mathbf{a}$; di conseguenza la seconda legge della dinamica applicata alla massa m si scriverà:

$$\mathbf{R}_\mathrm{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

$$y) \quad R_\mathrm{N} - mg = ma \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{N} = m(g+a).$$

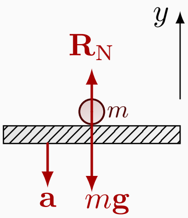


La reazione vincolare oltre a equilibrare la forza peso deve fornire la forza per imprimere l'accelerazione $\mathbf{a}$ alla massa m.

(b) Se l'ascensore scende con accelerazione costante $\mathbf{a}$, un osservatore a terra vedrà scendere la massa m con accelerazione $\mathbf{a}$; di conseguenza la seconda legge della dinamica applicata alla massa m si scriverà:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{N}} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

$$y)\quad R_{\mathrm{N}} - mg = -ma \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{N}} = m(g - a).$$



La reazione vincolare equilibra solo parzialmente la forza peso la cui parte non equilibrata dà la forza per imprimere l'accelerazione a alla massa m.