Complementi di Fisica - III Lezione

Soluzione degli esercizi 1, 2, 3, 5 e 6 della I prova di autovalutazione

Soluzione degli esercizi 1, 2 e 4 della II prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

20 marzo 2025

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Soluzione degli esercizi 1, 2, 3, 5 e 6 della I prova di autovalutazione

Esercizio 1

Una carica q viene trasferita da una sfera di plastica inizialmente scarica a una sfera identica distante $50\,\mathrm{cm}$. La forza di attrazione tra le sfere che, essendo di piccolo raggio, possono considerarsi puntiformi, è $2\,\mathrm{mN}$. Quanti elettroni sono stati trasferiti da una sfera all'altra?

Esercizio 1

Una carica q viene trasferita da una sfera di plastica inizialmente scarica a una sfera identica distante 50 cm. La forza di attrazione tra le sfere che, essendo di piccolo raggio, possono considerarsi puntiformi, è 2 mN. Quanti elettroni sono stati trasferiti da una sfera all'altra?

Se n elettroni vengono trasferiti da una sfera all'altra, la sfera su cui vengono trasferiti risulterà carica negativamente con una carica pari a $-ne$ (essendo e il valore assoluto della carica dell'elettrone: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C), mentre l'altra sfera rimarrà carica positivamente con un'identica quantità di carica.
Le due sfere si attireranno con una forza che in modulo è:

$$F = K\frac{(ne)(ne)}{r^2} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{Fr^2}{Ke^2}} \simeq 1{,}4 \times 10^{12}.$$

Esercizio 2

Due cariche puntiformi di segno positivo q_1 e q_2 poste a una distanza $d = 2\,\text{m}$ si respingono con una forza $F = 1\,\text{N}$. Determinare q_1 e q_2 sapendo che $q_1 + q_2 = 5 \times 10^{-5}\,\text{C}$.

Esercizio 2

Due cariche puntiformi di segno positivo q_1 e q_2 poste a una distanza $d = 2\,\mathrm{m}$ si respingono con una forza $F = 1\,\mathrm{N}$. Determinare q_1 e q_2 sapendo che $q_1 + q_2 = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$.

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad q_1 q_2 = \frac{Fr^2}{K} = 4{,}4 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2 = \gamma$$

Si ha allora il seguente sistema nelle incognite q_1 e q_2

$$\begin{cases} q_1 q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = \alpha \end{cases}$$

dove $\alpha = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$.

Dalla seconda equazione si ha

$$q_1 = \alpha - q_2$$

che sostituito nella prima equazione fornisce l'equazione

$$q_2^2 - \alpha q_2 - \gamma = 0$$

$$q_2^2 - \alpha q_2 - \gamma = 0$$

Le soluzioni di tale equazione sono:

$$q_2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}.$$

Il segno positivo dà

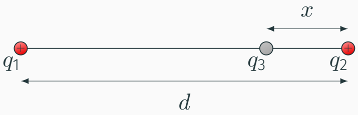
$$q_2 = 3{,}85 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1{,}15 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$$

e il segno negativo fornisce la soluzione simmetrica

$$q_2 = 1{,}15 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 3{,}85 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}.$$

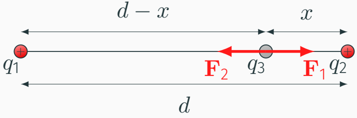
Esercizio 3

Tre cariche puntiformi giacciono lungo l'asse delle x. La carica positiva $q_1 = 5\,\mu$C si trova a una distanza $d = 2$ m dalla carica positiva $q_2 = 1\,\mu$C; mentre la carica q_3 si trova tra q_1 e q_2 a una distanza x da q_2 tale che la forza su q_3 è nulla. Si determini x sia tramite la forza di Coulomb sia utilizzando il campo elettrico.



Nella posizione occupata da q_3

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad K\frac{q_1 q_3}{(d-x)^2} = K\frac{q_2 q_3}{x^2}.$$



da cui segue la seguente uguaglianza che esprime l'uguaglianza delle intensità dei campi elettrici creati da q_1 e q_2 nella posizione occupata da q_3:

$$\frac{q_1}{(d-x)^2} = \frac{q_2}{x^2}.$$

Si ottiene così la seguente equazione di secondo grado in x:

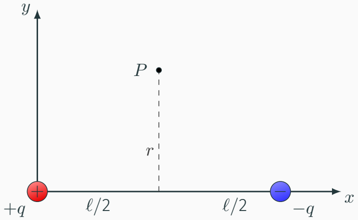
$$(q_1 - q_2)x^2 + 2dq_2 x - d^2 q_2 = 0.$$

La soluzione positiva dell'equazione fornisce il valore cercato

$$x \simeq 0{,}62\,\mathrm{m}$$

Esercizio 5

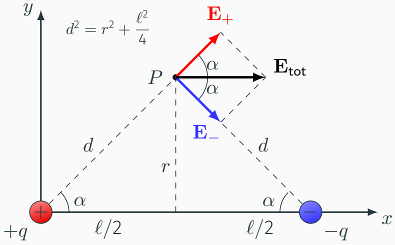
Due cariche puntiformi q uguali in modulo ma di segno opposto (dipolo elettrico) sono distanti tra loro ℓ. Si determini il campo elettrico in un generico punto P posto a distanza r dal punto mediano del segmento che unisce le due cariche e che giace lungo l'asse perpendicolare a tale segmento.



$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

dove

$$E_+ = E_- = K\frac{q}{d^2} = K\frac{q}{r^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$



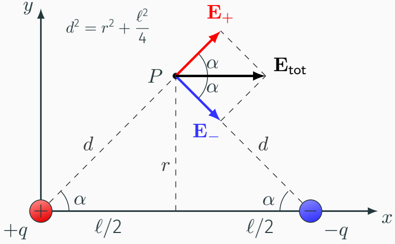
Le componenti dei due campi elettrici lungo l'asse y sono uguali e contrarie. La somma delle componenti lungo l'asse x è:

$$E_{\text{tot}} = 2E_+ \cos\alpha \qquad \left(d\cos\alpha = \frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\ell}{2d} = \frac{\ell}{2\left(r^2 + \frac{\ell^2}{4}\right)^{1/2}} \right).$$

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

dove

$$E_+ = E_- = K\frac{q}{d^2} = K\frac{q}{r^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$



Le componenti dei due campi elettrici lungo l'asse y sono uguali e contrarie. La somma delle componenti lungo l'asse x è:

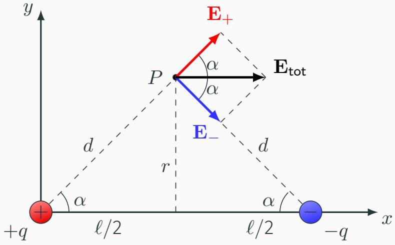
$$E_{\text{tot}} = 2E_+ \cos\alpha \qquad \left(d\cos\alpha = \frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\ell}{2d} = \frac{\ell}{2\left(r^2 + \frac{\ell^2}{4}\right)^{1/2}} \right).$$

In conclusione, il modulo del campo elettrico in P è determinato

$$E_{\text{tot}} = K\frac{q\ell}{\left(r^2 + \frac{\ell^2}{4}\right)^{3/2}} = K\frac{p}{\left(r^2 + \frac{\ell^2}{4}\right)^{3/2}}$$

dove $p = q\ell$ è il momento di dipolo elettrico.

$$E_{\text{tot}} = K \frac{p}{\left(r^2 + \frac{\ell^2}{4}\right)^{3/2}}$$



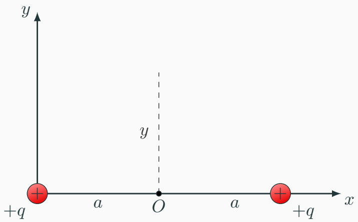
A grande distanza dal dipolo ($r \gg \ell$)

$$E \simeq K \frac{p}{r^3}$$

A grande distanza dal dipolo, il campo elettrico sull'asse decresce più rapidamente di quello di una singola carica puntiforme ($1/r^3$ contro $1/r^2$). **Come si può spiegare qualitativamente questo fenomeno?**

Esercizio 6

Due cariche positive puntiformi sono poste a una distanza $2a$ una dall'altra. Determinare il luogo dei punti nei quali il campo elettrico da esse generato è perpendicolare alla congiungente le due cariche e darne il suo modulo in funzione della distanza y dal punto mediano del segmento che unisce le due cariche.



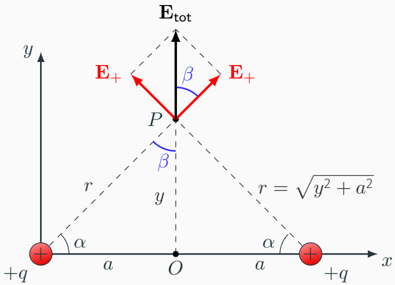
Il campo elettrico creato dalle due cariche è perpendicolare al segmento che le congiunge solo lungo l'asse di tale segmento.
Il luogo dei punti cercato è il cerchio di centro O e raggio $\overline{OP} = y$

$$E_+ = K\frac{q}{r^2} = K\frac{q}{y^2 + a^2}$$

$$E_{\text{tot}} = 2E_+ \cos\beta.$$

dove

$$\cos\beta = \frac{y}{r}$$



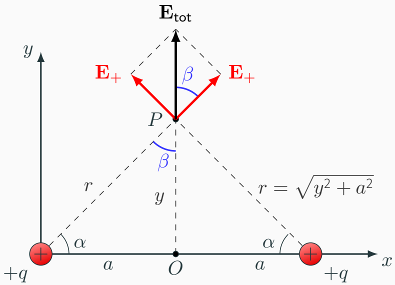
Il campo elettrico creato dalle due cariche è perpendicolare al segmento che le congiunge solo lungo l'asse di tale segmento.
Il luogo dei punti cercato è il cerchio di centro O e raggio $\overline{OP} = y$

$$E_+ = K\frac{q}{r^2} = K\frac{q}{y^2 + a^2}$$

$$E_{\text{tot}} = 2E_+ \cos\beta.$$

dove

$$\cos\beta = \frac{y}{r}$$



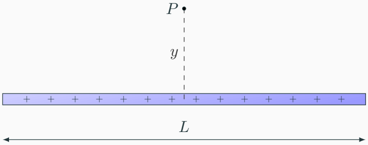
In conclusione, il modulo del campo elettrico in P è determinato

$$E_{\text{tot}} = 2Kq\frac{y}{(y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Soluzione degli esercizi 1, 2 e 4 della II prova di autovalutazione

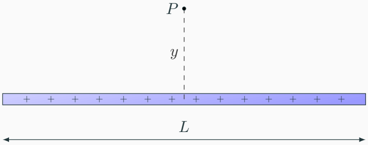
Esercizio 1

Sulla superficie di una sbarretta di lunghezza L e spessore trascurabile è uniformemente distribuita una carica positiva q. Si determini il campo elettrico in un punto P posto quota y sulla retta normale alla sbarretta passante per il punto mediano.



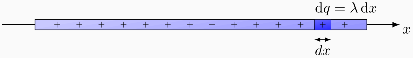
Esercizio 1

Sulla superficie di una sbarretta di lunghezza L e spessore trascurabile è uniformemente distribuita una carica positiva q. Si determini il campo elettrico in un punto P posto quota y sulla retta normale alla sbarretta passante per il punto mediano.



La densità lineica di carica è:

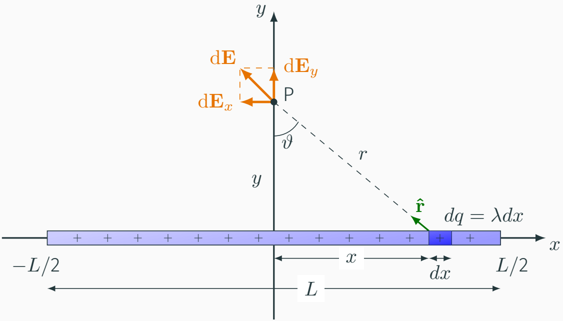
$$\lambda = \frac{q}{L}.$$



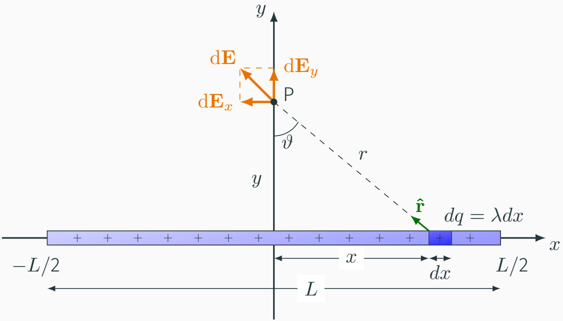
Ogni piccolo elemento di lunghezza dx possiede una carica

$$dq = \lambda dx.$$

Per ogni elemento di carica dq avente coordinata x positiva, esiste il corrispondente avente coordinata negativa: in P i loro contributi al campo elettrico lungo l'asse delle x si annullano essendo uguali e contrari. Il campo elettrico in P sarà diretto lungo l'asse y.



Per ogni elemento di carica dq avente coordinata x positiva, esiste il corrispondente avente coordinata negativa: in P i loro contributi al campo elettrico lungo l'asse delle x si annullano essendo uguali e contrari. Il campo elettrico in P sarà diretto lungo l'asse y.



$$dE = K\frac{dq}{r^2} \quad \Rightarrow \quad dE_y = dE\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad dE_y = K\frac{\lambda dx}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

essendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\vartheta = y/r$

$$E_y = \int_{\text{corpo}} dE_y = K\lambda y \boxed{\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$$

È noto che

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \text{cost.}}$$

Quindi

$$E_y = K\lambda y \left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$E_y = \int_{\text{corpo}} dE_y = K\lambda y \boxed{\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$$

È noto che

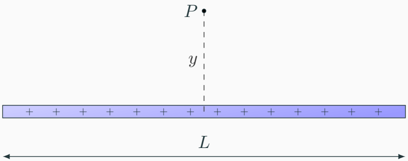
$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + \text{cost.}}$$

Quindi

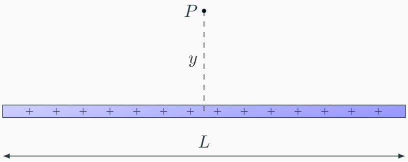
$$E_y = K\lambda y \left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

In conclusione il modulo di E_y è determinato

$$E_y = \frac{Kq}{y}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

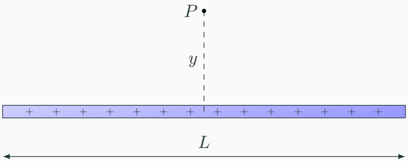


$$E_y = \frac{Kq}{y} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$



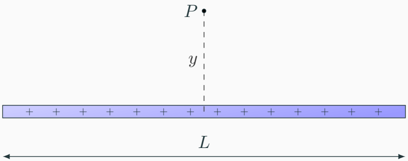
$$E_y = \frac{Kq}{y} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

- Se $y \gg L \quad \Rightarrow \quad E_y = Kq/y^2 = q/4\pi\epsilon_0 y^2$



$$E_y = \frac{Kq}{y} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

- Se $y \gg L \quad \Rightarrow \quad E_y = Kq/y^2 = q/4\pi\epsilon_0 y^2$
- Se $y \ll L \quad \Rightarrow \quad E_y = 2Kq/yL = 2K\lambda/y = \lambda/2\pi\epsilon_0 y$



$$E_y = \frac{Kq}{y} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

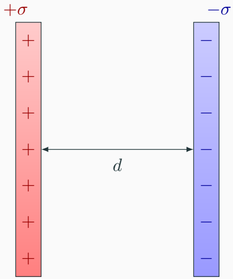
- Se $y \gg L \quad \Rightarrow \quad E_y = Kq/y^2 = q/4\pi\epsilon_0 y^2$
- Se $y \ll L \quad \Rightarrow \quad E_y = 2Kq/yL = 2K\lambda/y = \lambda/2\pi\epsilon_0 y$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

è l'intensità del campo elettrico creato da un filo rettilineo infinitamente lungo e uniformemente carico con densità lineica di carica λ.

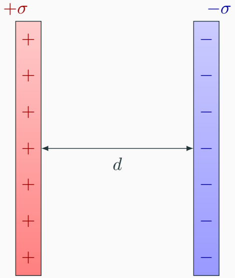
Esercizio 2

Due piani infinitamente estesi separati da una distanza d sono uniformemente carichi con densità superficiale di carica $+\sigma$ e $-\sigma$, rispettivamente.
Si determini il campo elettrico in ogni punto dello spazio.



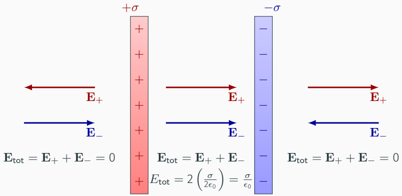
Esercizio 2

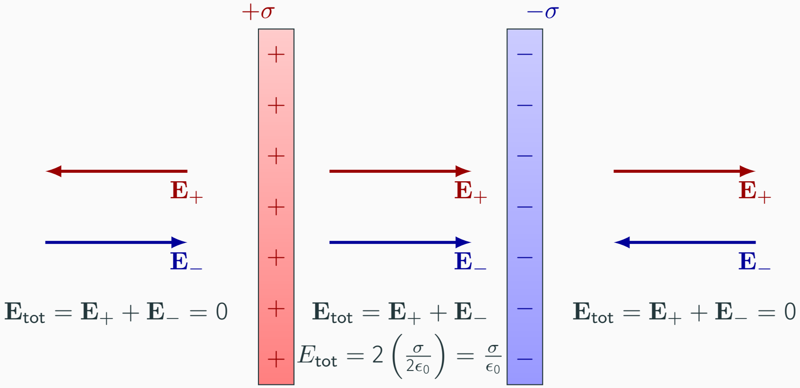
Due piani infinitamente estesi separati da una distanza d sono uniformemente carichi con densità superficiale di carica $+\sigma$ e $-\sigma$, rispettivamente.
Si determini il campo elettrico in ogni punto dello spazio.



Il campo elettrico è la somma dei campi elettrici generati da ciascuna distribuzione piana. Tali campi hanno eguale modulo

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$





Il campo elettrico è diverso da zero solo nella zona tra i due piani (larghezza d), diretto dallo strato positivo a quello negativo e vale

Campo elettrico creato da un doppio strato piano

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Campi elettrici notevoli

- Carica puntiforme ($E \propto 1/r^2$)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Filo rettilineo infinitamente lungo ($E \propto 1/y$)

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

- Piano infinitamente esteso uniformemente carico con densità di carica σ ($E = \text{cost.}$)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- Doppio strato piano infinitamente esteso uniformemente carico con densità di carica σ uguale e contraria ($E = \text{cost.}$)

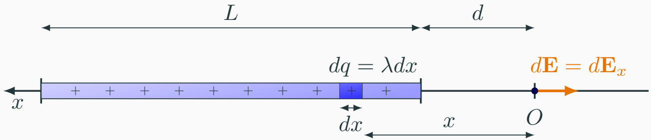
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Esercizio 4

Sulla superficie di una sottile sbarretta di lunghezza L è uniformemente distribuita una carica positiva q.
Si determini il campo elettrico in un punto O posto a distanza d lungo la direzione della sbarretta.

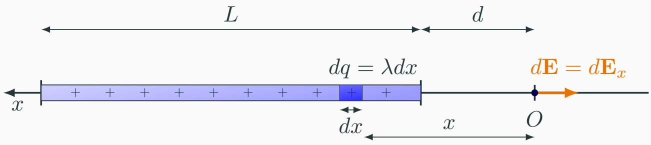
Esercizio 4

Sulla superficie di una sottile sbarretta di lunghezza L è uniformemente distribuita una carica positiva q.
Si determini il campo elettrico in un punto O posto a distanza d lungo la direzione della sbarretta.



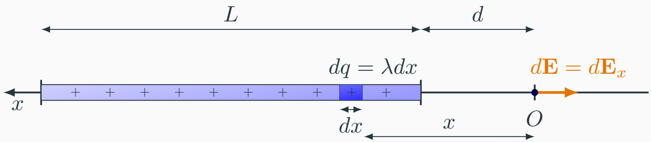
Ogni elemento dx a distanza x da O possiede una carica infinitesima $dq = \lambda dx = q/L dx$ e genererà nel punto O un campo elettrico $d\mathbf{E}_x$ diretto come in figura e di modulo

$$dE_x = K\frac{dq}{x^2} = K\frac{q}{L}\frac{dx}{x^2}.$$



Il campo elettrico totale $\mathbf{E}$, diretto lungo l'asse delle x, sarà la somma dei campi creati in O da tutti gli elementi di carica infinitesima dq.
Il modulo del campo elettrico è

$$E = \int_{\text{corpo}} dE_x = K\frac{q}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = K\frac{q}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_d^{d+L}$$



Il campo elettrico totale $\mathbf{E}$, diretto lungo l'asse delle x, sarà la somma dei campi creati in O da tutti gli elementi di carica infinitesima dq.
Il modulo del campo elettrico è

$$E = \int_{\text{corpo}} dE_x = K\frac{q}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = K\frac{q}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_d^{d+L}$$

In conclusione, il modulo del campo elettrico in O è determinato

$$E = \frac{Kq}{d(d+L)}$$