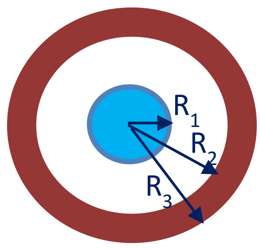
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2019-2020 – Ing. Aerospaziale - Prova scritta del 14 febbraio 2020

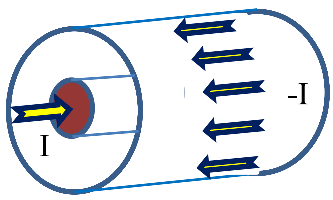
1) Una sfera conduttrice di raggio R_1 possiede una carica Q nota. All'esterno, a distanza R_2 vi è un guscio sferico concentrico di materiale dielettrico di spessore $\Delta = R_3 - R_2$ (come in figura) e costante dielettrica ε_r nota.

a) Ricavare l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(r)$ per $r > 0$
b) Disegnare il grafico di $E_r(r)$.
c) Ricavare la densità di carica di polarizzazione sulla superfici esterna del dielettrico.



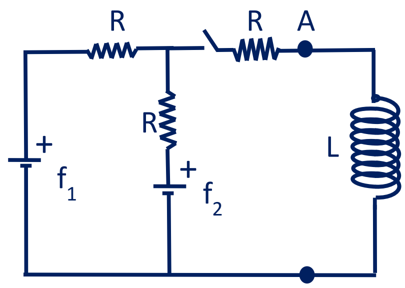
2) Un cavo coassiale è formato da un cavo conduttore interno di raggio *a* e da un mantello conduttore concentrico di raggio *b,* di sezione trascurabile. Nel cavo interno scorre una corrente *I* distribuita uniformemente sulla sezione, mentre sul mantello scorre la stessa corrente *I* in direzione opposta, anch'essa uniformemente distribuita sulla superficie. Assumendo il cavo rettilineo e lungo si ricavi l'espressione:

a) del campo di induzione magnetica in tutto lo spazio;
b) dell'energia immagazzinata nel campo **B**, per unità di lunghezza



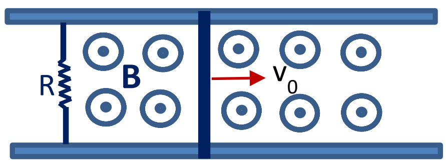
3) Sia dato il circuito rappresentato in figura, e assumiamo noti i valori di f_1, f_2, R e L. All'istante t=0 viene chiuso l'interruttore e il sistema giunge a regime con una costante di tempo τ.

a) Applicare il teorema di Thevenin ai morsetti A e B e ricavare f_{eq} e R_{eq}.
b) Ricavare la costante di tempo τ del transitorio.
c) Ricavare a <u>regime</u> l'espressione dell'energia immagazzinata nell'induttore.

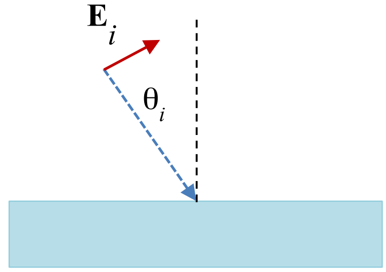


4) Una sbarretta metallica (conduttrice) di lunghezza *l* e massa *m* è appoggiata su due binari su cui può scivolare senza attrito. La sbarretta viene lanciata con velocità v_o e si muove sui binari mantenendo con essi il contatto elettrico. I binari, buoni conduttori, sono collegati tra loro mediante una resistenza R. La barretta, i binari e la resistenza formano un circuito immerso in un campo magnetico B uniforme perpendicolare al piano dei binari. Determinare:

a) la forza elettromotrice indotta e la corrente nel circuito
b) L'andamento della velocità della barretta nel tempo



5) Un'onda piana nel vuoto incide su una lastra di vetro con indice di rifrazione pari a *n*. L'onda si propaga lungo una direzione che forma un angolo θ_i rispetto alla normale alla superficie (angolo di incidenza). Si calcoli l'angolo con cui l'onda piana esce dalla lastra (rispetto alla normale alla superficie di uscita) *dopo averla attraversata.*



Per tutti gli esercizi si richiede l'analisi dimensionale del risultato

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 14.02.2020

ESERCIZIO N.1

a) Consideriamo 4 regioni:

I) Nel conduttore $r < R_1$ il campo elettrico è nullo

II) Nel vuoto $R_1 < r < R_2$. Sfruttiamo la simmetria sferica e applicando il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio r, otteniamo:

$$E_{0r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

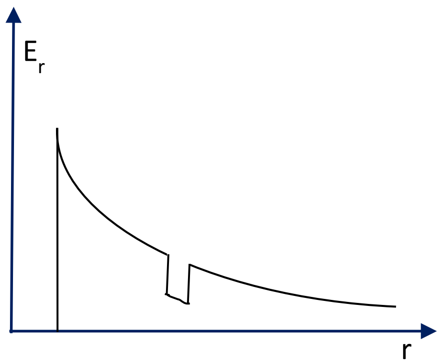
III) Nel dielettrico $R_2 < r < R_3$

$$E_r = \frac{E_{0r}}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

IV) Nel vuoto $r > R_3$. Applicando di nuovo il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio $r > R_2$, otteniamo

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b)



c)

$$\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_3^2}$$

ESERCIZIO N.2

a) Data la simmetria abbiamo solo la componente $B_\varphi(r)$ del campo. Applichiamo il Teorema della circuitazione di Ampère in 3 regioni.

I) Nel conduttore $r < a$

Densità di corrente nel conduttore interno:

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\oint B_\varphi(r)\, dl = \mu_0 \int_0^r J dS$$

$$B_\varphi(r)2\pi r = \mu_0 J\pi r^2$$

$$B_\varphi(r) = \mu_0 \frac{J\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

II) a< r < b

$$\oint B_\varphi(r)\, dl = \mu_0 I$$

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

III) Nel vuoto r > b

$$\oint B_\varphi(r)\, dl = 0$$

$$B_\varphi(r) = 0$$

b) Energia magnetica immagazzinata in un tratto di lunghezza L:

$$w_m = \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0}$$

Energia magnetica in un tratto di lunghezza L:

$$U_m = \int \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0} d\tau$$

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r\right)^2 L2\pi r dr + \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 L2\pi r dr$$

Energia magnetica per unità di lunghezza:

$$\frac{U_m}{L} = \frac{\pi}{\mu_0}\left[\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{4}\right] + \frac{\pi}{\mu_0}\left[\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2\right] ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{U_m}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{1}{4} + ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

ESERCIZIO N.3

a) Applichiamo il teorema di Thevenin ai morsetti A e B:

Nella prima maglia circola una corrente

$$I = \frac{f_1 - f_2}{2R}$$

Per ricavare la f_{eq} calcoliamo la differenza di potenziale tra A e B

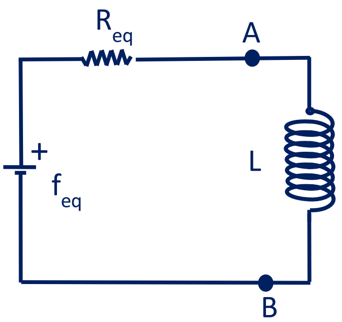
$$V_A - V_B - f_2 = RI$$

$$V_A - V_B = R\left(\frac{f_1 - f_2}{2R}\right) + f_2$$

$$f_{eq} = V_A - V_B = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

La resistenza equivalente vista tra A e B:

$$R_{eq} = \frac{3}{2}R$$



$$f_{eq} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$R_{eq} = \frac{3}{2}R$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

A regime la corrente I_∞ nell'induttore è:

$$I_\infty = \frac{f_{eq}}{R_{eq}} = \frac{f_1 + f_2}{3R}$$

L'energia immagazzinata nell'induttore è

$$U_L = \frac{1}{2}LI_\infty^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{f_1 + f_2}{3R}\right)^2$$

<u>ESERCIZIO N.4</u>

a) In un dato istante di tempo la sbarretta avrà una velocità $v(t)$, su ogni carica q di essa agirà una forza di Lorentz pari a:

$$F_L = \mathrm{q}\,\vec{v}(t) \wedge \vec{B}$$

integrando lungo la sbarretta otteniamo una forza elettromotrice pari a:

$$f_{em} = v(t)Bl$$

che causerà la circolazione di una corrente pari :

$$I(t) = \frac{v(t)Bl}{R}$$

La sbarretta percorsa da corrente immersa nel campo B sarà soggetta a una forza magnetica data da:

$$d\vec{F}_M = \mathrm{I}\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

che risulterà frenante e, integrata sulla sbarretta, sarà pari a:

$$F_M = -I(t)lB = -\frac{v(t)B^2l^2}{R}$$

Per studiare il moto della sbarretta applichiamo il II principio della dinamica:

$$F_M = ma$$

$$-\frac{v(t)B^2l^2}{R} = m\frac{dv(t)}{dt}$$

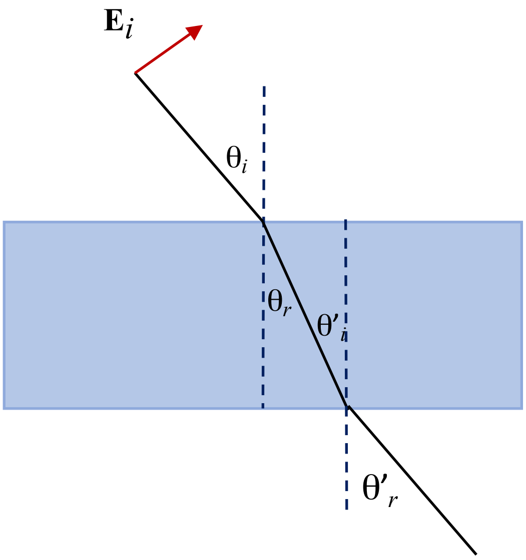
la cui soluzione è:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove

$$\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$$

<u>ESERCIZIO N.5</u>



L'onda attraversa la superficie superiore:

$$sin\theta_i = n\ sin\theta_r$$

$$sin\theta_r = \frac{sin\theta_i}{n}$$

L'onda attraversa la superficie inferiore:

$$\theta_i^{'} = \theta_r$$

$$n\ sin\theta_i^{'} = sin\theta_r^{'}$$

$$sin\theta_r^{'} = n\ sin\theta_r$$

$$sin\theta_r^{'} = n\ \frac{sin\theta_i}{n}$$

$$\theta_r^{'} = \theta_i$$

La direzione dell'onda piana non cambia quando attraversa lo strato di vetro.