



FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

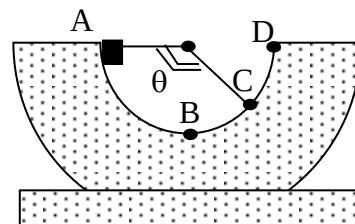
7° prova del 10 Aprile 2025

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati vanno inviati all'indirizzo corsofisicagestionalesapienza@gmail.com entro Martedì 15 Aprile.

1. Ad un oscillatore libero la cui ampiezza di oscillazione è $A_0=6\text{cm}$ viene conferito, quando l'oscillatore raggiunge la sua massima elongazione, un impulso istantaneo $I=1\text{Ns}$. Determinare i livelli di energia meccanica prima e dopo l'impulso, e la nuova ampiezza di oscillazione A_1 . (Dati: massa dell'oscillatore $m=10\text{kg}$, costante elastica $k=50\text{N/m}$).

2. Un pendolo di massa $m=3\text{kg}$ viene messo in oscillazione. Conoscendo il valore massimo della tensione cui può essere sottoposto il filo $T_{\max}=60\text{N}$, determinare l'intervallo di angoli di inclinazione massima ammessi che garantiscono l'integrità del filo.

3. Un punto materiale di massa $m=100\text{g}$ viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla dalla sommità di uno scivolo cilindrico liscio (punto A), il cui profilo è una semicirconferenza. Si calcoli la reazione normale esercitata dal vincolo quando il punto materiale passa per i punti B, C, D ossia rispettivamente per 90° , 135° , 180° .



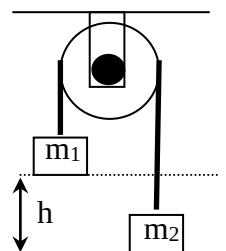
4. Un satellite artificiale di 30kg si muove su di una orbita circolare "equatoriale" intorno alla terra (orbita complanare all'equatore terrestre). Esso si muove alla stessa velocità di rotazione della terra, in modo tale da apparire fermo per un qualunque osservatore terrestre (satellite geostazionario). Perché l'orbita sia stabile a quale quota h dalla superficie terrestre si deve trovare il satellite?

Determinare i valori di energia cinetica, potenziale e meccanica del satellite su tale orbita.

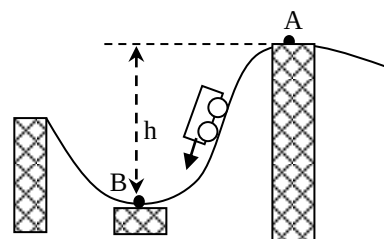
(Raggio terrestre $R_T=6370\text{ km}$, massa terrestre $M_T=5.98 \cdot 10^{24}\text{kg}$, $G=6.67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$).

5. Un corpo di massa $m=5\text{Kg}$ scivola lungo un piano avente coefficiente di attrito $\mu_d=0.20$ ed inclinato di un angolo $\alpha=30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il corpo possiede inizialmente una velocità $v_0=1\text{m/s}$ diretta lungo la linea di massima pendenza. Dopo aver percorso $L=1\text{m}$ lungo il piano, il corpo incontra l'estremo libero di una molla di costante elastica $k=5 \cdot 10^3\text{ N/m}$ che viene compressa nella direzione di v_0 . Calcolare la massima compressione Δd subita dalla molla.

6. Una massa $m_1=4\text{kg}$ è appesa ad una estremità di una fune di massa trascurabile. All'altra estremità della fune è appesa una massa $m_2=3\text{kg}$. Si determini la velocità finale della prima massa quando scende, partendo da ferma da una altezza di $h=2\text{m}$.



7. In un Luna Park, un tratto di montagne russe ha la forma come in figura. Un carrello di massa $m=100\text{ kg}$ arriva in A con una velocità $v_A=20\text{ km/h}$ e scivola senza attrito (essendo vincolato alla rotaia) verso B che si trova ad un dislivello $h=8\text{m}$ più in basso dove la rotaia ha un raggio di curvatura $\rho=10\text{m}$. Determinare la forza cui è sottoposto il traliccio quando il carrello giunge in B.





FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 7° prova

1. Nel moto armonico semplice l'energia potenziale vale $U(x) = kx^2/2$ dove x è la distanza dal punto di equilibrio. Il valore di energia meccanica prima dell'impulso coincide con il massimo valore di energia potenziale $E_0 = U(A) = kA_0^2/2 = 90mJ$, quando cioè l'oscillatore raggiunge la massima elongazione, si ferma ed inverte il suo moto. In quell'istante viene conferito l'impulso I che causa una variazione di quantità di moto $I = \Delta p = p_{fin} - p_{in} = p_{fin}$ (essendo nullo $p_{in}=0$) facendo acquistare alla massa una energia cinetica $T = mv_{fin}^2/2 = I^2/2m$ che sommata alla energia potenziale precedente porta ad un nuovo valore di energia meccanica maggiorato $E_1 = kA_0^2/2 + I^2/2m = 140mJ$. Il moto armonico corrispondente a questo nuovo valore di energia meccanica raggiungerà la massima elongazione A_1 quando il punto materiale invertirà il suo moto, raggiungendo un massimo della nuova energia potenziale $U(A_1) = kA_1^2/2$. Per la conservazione dell'energia meccanica $U(A_1) = E_1$ da cui $kA_1^2/2 = kA_0^2/2 + I^2/2m$ e conseguentemente $A_1 = \sqrt{A_0^2 + I^2/mk} = 7.5 \text{ cm}$.

2. La massa appesa al filo subisce due forze: la sua forza peso $P=mg$ lungo la verticale, e la tensione T diretta lungo il filo. Applicando il II principio alla massa nella generica posizione (1), dopo la consueta scomposizione secondo gli

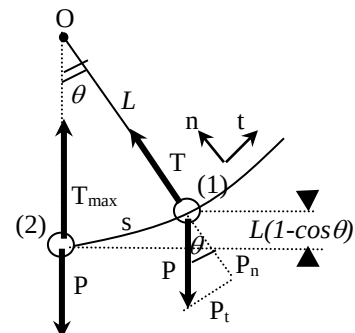
assi n, t si ottiene il sistema
$$\begin{cases} \hat{n} \left\{ T - P_n = ma_n \right. \\ \hat{t} \left\{ -P_t = ma_t \right. \end{cases} \text{ dove } P_n = mg \cos \theta, P_t = mg \sin \theta,$$

l'accelerazione tangenziale vale $a_t = d^2s/dt^2$, quella normale vale $a_n = v^2/L$.

La tensione del filo si ricava dalla prima equazione da cui

$T(\theta) = mg \cos \theta + mv^2/L$, dove è stata evidenziata la dipendenza della tensione dall'angolo θ . In particolare il punto critico per la rottura del pendolo è il punto (2) per $\theta=0$ in cui la tensione è massima perché sono simultaneamente massimi tutti e due gli addendi per cui $T_{max} = T(\theta=0) = mg + mv_2^2/L$. Per calcolare T_{max} occorre ora determinare la velocità massima v_2 che viene raggiunta nel punto (2). Per far questo non utilizziamo l'altra equazione sull'asse t , dalla quale si può derivare la legge oraria solo per piccoli angoli $\theta < 15^\circ$. Appliciamo invece il principio di conservazione dell'energia meccanica fra il punto (1) relativo alla massima oscillazione θ_{max} ed il punto (2) relativo a $\theta=0$. L'energia meccanica nel punto (1) è esclusivamente potenziale e vale $E_{m1} = mgL(1 - \cos \theta_{max})$, mentre nel punto (2) è esclusivamente cinetica valendo $E_{m2} = mv_2^2/2$. Applicando il principio di conservazione si determina $v_2^2 = 2gL(1 - \cos \theta_{max})$, che sostituita nell'equazione della tensione massima fornisce il valore massimo di rottura

$T_{max} = mg(3 - 2 \cos \theta_{max})$, da cui ricaviamo l'angolo massimo $\theta_{max} = \arccos\left(\frac{3mg - T_{max}}{2mg}\right) = 61^\circ 20'$



3. In un punto generico **K** della sua traiettoria circolare, il corpo è soggetto solo alla forza peso P ed alla reazione normale R_n . Proiettando tali forze lungo la normale si ottiene

$$R_n - P \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = ma_n = m \frac{v^2}{R}$$

Il calcolo della velocità si effettua imponendo la conservazione dell'energia meccanica (in assenza di attrito) tra lo stato iniziale in **A** e lo stato generico in **K**.

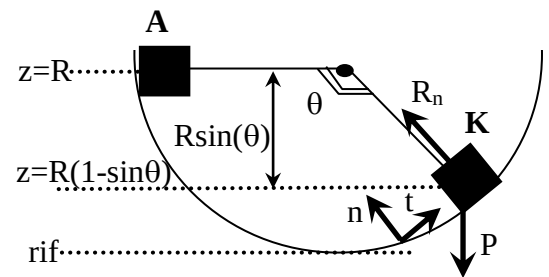
$U_A + T_A = U_K + T_K$, dove assumendo $T_A=0$, ed il riferimento nel punto più basso della traiettoria

si ottiene $mgR = mgR(1 - \sin \theta) + mv^2/2$

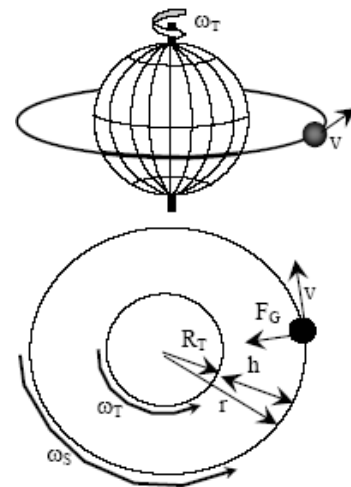
da cui la **velocità nel punto K** vale $v = \sqrt{2gR \sin \theta}$

e conseguentemente la **reazione normale nel punto K** vale $R_n - mg \sin \theta + 2mg \sin \theta = 3mg \sin \theta$

che può essere ora calcolata in **B,C,D**

$$\begin{cases} R_n(B) = 3mg = 2.94N \\ R_n(C) = 3mg \sin(135^\circ) = 2.08N \\ R_n(D) = 0N \end{cases}$$


4. Affinché il satellite naturale si muova sull'orbita circolare “equatoriale” stabile rappresentata in figura (nello spazio e nel piano equatoriale), la forza di attrazione gravitazionale $F_G = GM_T m/r^2$ deve poter fornire l'accelerazione normale $a_n = v^2/r = \omega_s^2 r$ necessaria al satellite per descrivere l'orbita circolare. Applicando il II principio lungo la normale si ha $F_G = ma_n$ da cui si ottiene la velocità angolare del satellite $\omega_s = \sqrt{GM_T/r^3}$. La condizione di geostazionarietà del satellite (“...il satellite appare fermo per un qualunque osservatore terrestre”) si esprime imponendo che la velocità angolare del satellite ω_s sia uguale alla velocità angolare di rotazione terrestre dove il periodo di rotazione terrestre è $T_{rot} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$. Da questa relazione $\omega_s = \omega_T$ si ottiene quindi $r = \sqrt[3]{GM_T/\omega_T^2} = \sqrt[3]{GM_T T_{rot}^2/4\pi^2} = 42250 \text{ km}$ (distanza dal centro della terra). La quota h dalla superficie risulta quindi $h = r - R_T = 35880 \text{ km}$.

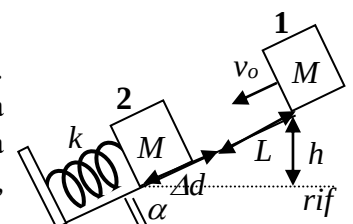


L'energia cinetica vale $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}G \frac{m \cdot M_T}{r} = 142 \text{ MJ}$

L'energia potenziale vale $U = -G \frac{m \cdot M_T}{r} = -283 \text{ MJ}$

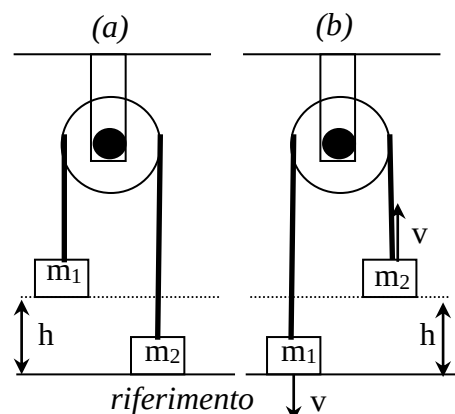
L'energia meccanica vale $E_m = U + K = -\frac{1}{2}G \frac{m \cdot M_T}{r} = -142 \text{ MJ}$

5. L'esercizio si può risolvere con considerazioni puramente energetiche. L'energia meccanica E_m è qui data dalla somma dell'energia potenziale della forza peso U_p , dall'energia potenziale della forza elastica U_{el} e dell'energia cinetica T . Nello stato finale 2 la molla raggiunge la compressione massima Δd , la massa raggiunge la quota minima di riferimento per l'energia potenziale



($U_P=0$), si ferma un istante ($T=0$) prima di invertire il moto. Nel punto 2 quindi il valore dell'energia meccanica è $E_{m2} = k\Delta d^2/2$. Nel punto 1 invece la molla è ovviamente a riposo mentre la massa si trova ad una quota $h=(\Delta d+L)\sin\alpha$ rispetto al riferimento possedendo pertanto l'energia meccanica $E_{m1} = mv_o^2/2 + mg(\Delta d + L)\sin\alpha$. L'energia meccanica non si conserva tra lo stato iniziale 1 e finale 2, ma diminuisce a causa dell'attrito che compie un lavoro negativo $L_A = -A_d(\Delta d + L) = -\mu_d mg \cos\alpha(\Delta d + L)$. Imponendo quindi $L_A = E_{m2} - E_{m1}$ si ottiene $-\mu_d mg \cos\alpha(\Delta d + L) = k\Delta d^2/2 - mv_o^2/2 - mgsin\alpha(\Delta d + L)$ che ordinata in Δd dà luogo all'equazione $\Delta d^2 - [2mg \sin\alpha(1 - \mu_d/tg\alpha)/k]\Delta d - [(2mgsin\alpha(1 - \mu_d/tg\alpha)L + mv_o^2)/k] = 0$ di 2° grado che ha l'unica soluzione accettabile positiva $\Delta d=9.27$ cm.

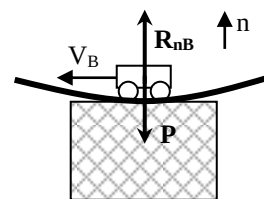
6. Nel sistema in esame si assume che gli attriti eventualmente presenti tra la puleggia e la fune non compiano lavoro. In questo caso l'energia meccanica del sistema fra lo stato iniziale (a) e quello finale (b) si conserva. Nello stato (a) entrambe le masse sono in quiete (assenza di energia cinetica); pertanto l'energia meccanica è data dalla sola energia potenziale della prima massa (calcolata rispetto al riferimento) $E_{ma}=U_{1a}=m_1gh$. Nello stato finale entrambe le masse si muovono alla velocità comune v , possedendo l'energia cinetica $T_b = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$; il sistema possiede anche l'energia potenziale della seconda massa



$U_b=m_2gh$ che è salita alla quota h . L'energia meccanica totale vale $E_{mb} = m_2gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$.

Eguagliando l'energia meccanica nei due stati si ricava il valore della velocità di traslazione del sistema $v = \sqrt{2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} = 2.37 \text{ m/s}$.

7. Nel punto B la rotaia può essere approssimata con un arco di circonferenza di raggio $\rho=10\text{m}$. Le forze cui è soggetto il carrello sono in quel punto la forza peso $\mathbf{P}$ e la reazione normale $\mathbf{R}_{nB}$. Proiettando lungo la normale n interna alla traiettoria si ottiene



$$R_{nB} - P = ma_n = m \frac{v_B^2}{\rho} \quad \text{da cui} \quad R_{nB} = m \left(g + \frac{v_B^2}{\rho} \right)$$

La velocità nel punto B si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B come segue

$$T_B + U_B = T_A + U_A \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2}mV_B^2 = \frac{1}{2}mV_A^2 + mgh \quad \text{e quindi} \quad V_B^2 = V_A^2 + 2gh$$

Combinando espressioni si ottiene per la reazione normale fornita dal traliccio al carrello

$$R_{nB} = m \left[g \left(1 + \frac{2h}{\rho} \right) + \frac{V_A^2}{\rho} \right] = 2857 \text{ N}$$