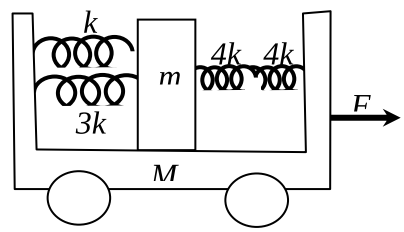
FISICA

A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
5° prova del 27 Marzo 2025

1. Un automezzo di massa pari ad una tonnellata, viene messo in moto con un motore che trasmette alle ruote una forza motrice costante F_o=1500 N. Assumendo che gli attriti esercitino una forza frenante descritta dalla legge $\vec{R} = -b\vec{v}$, con b=40 kg/s, si determinino le espressioni, in funzione del tempo, della velocità, della accelerazione calcolandone i valori numerici per alcuni intervalli di tempo dall'avviamento (10s, 30s, 60s).

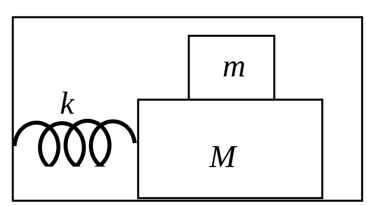
2. Un paracadutista di massa m=60 kg si lascia cadere da una quota di 1500 metri con velocità iniziale nulla. Il paracadutista in caduta libera acquista gradualmente velocità e decide di aprire il paracadute dopo un breve periodo di 12 s. All'apertura il paracadute esercita una resistenza aerodinamica descritta approssimativamente dalla legge R_v=bv ove b=30 kg/s. Qual è la velocità e la quota raggiunta dopo altri 5 s?

3 Una massa m=4Kg è appesa al soffitto per il tramite di una molla che si dispone lungo la verticale. In questa situazione l'allungamento statico è di L=30cm. Successivamente la massa è tirata per altri 5cm. Si calcoli la frequenza e l'accelerazione massima del moto oscillatorio.



4. All'interno di un carrello di massa *M* è posta una seconda massa *m* collegata agli estremi del carrello tramite un sistema di molle come indicato in figura. Calcolare lo spostamento dalla posizione di equilibrio della massa *m* rispetto al carrello, quando al carrello viene applicata una forza esterna *F*. [Dati: M=4 kg, m=250 g, k=2 N/m, F=7 N]

5. Una molla di costante elastica k=4 N/m è vincolata al soffitto per un suo estremo, mentre l'altro è collegato ad una massa m=2 kg libera di oscillare in verticale. Sapendo che il sistema è inizialmente in equilibrio determinare l'ampiezza ed il periodo di oscillazione quando viene impresso un impulso verticale verso l'alto di valore I=0.2 kg m/s. Ripetere l'esercizio applicando invece una termine forzante armonico diretto verso l'alto di intensità $F_z(t) = F_{\max}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ ove F_{max}=1N ed il periodo T assume diversi valori nelle varie prove (2s, 4s, 4.5s, 5s, 10s). Assumendo in questo caso la presenza di una minima resistenza passiva R_v=bv con b=0.01 kg/s determinare l'ampiezza delle oscillazioni che si instaurano permanentemente.



6. Una molla di costante elastica *k*=100N/m ha un estremo fisso ad una parete mentre l'altro è vincolato ad un blocco di massa *M*=4kg libero di muoversi senza attrito su di un piano orizzontale. Sul blocco *M* poggia un secondo blocco di massa *m* e, inizialmente questo sistema è mantenuto in quiete con la molla compressa di Δl=5cm rispetto alla lunghezza di riposo.
Noto il valore del coefficiente di attrito statico μ_s=0.08 fra i due blocchi, si determini il minimo valore che deve assumere la massa m affinché il sistema oscilli con il blocco *m* aderente al blocco *M*. Determinare in questo caso anche il periodo delle oscillazioni.

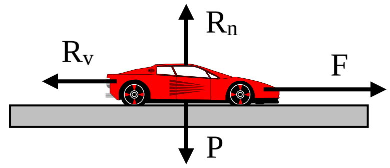
FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 5° prova

1. Studio delle forze agenti sull'automezzo



lungo asse x

$$F - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

lungo asse y

$$R_n = P = Mg$$

Equazione differenziale per la velocità

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{b}{m}\right)v = \frac{F}{m} \quad \text{che ha soluzione} \quad v(t) = v_{omo} + v_{part} = A\exp\left[-\frac{b}{m}t\right] + \frac{F}{b}$$

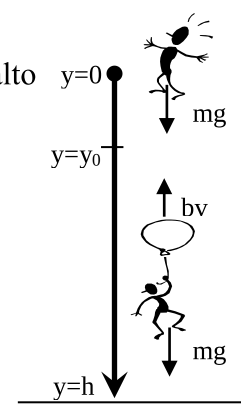
Imponendo la velocità inizialmente nulla si ottengono in sequenza le espressioni della

velocità: $v(t) = \frac{F}{b}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]$; per cui v(10s)=12.4 m/s ; v(30s)=26.2 m/s ; v(60s)=34.1 m/s

accelerazione: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$; a(10s)=1m/s^2 ; a(30s)=0.45 m/s^2 ; a(60s)=0.14 m/s^2

2. Inizialmente il paracadutista si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso con accelerazione di caduta g. Le grandezze cinematiche sono quindi

$$\begin{cases} y(t) = gt^2/2 \\ v_y(t) = gt \\ a_y = g \end{cases} \quad \text{dopo un tempo } t_o\text{=12 s quindi} \quad \begin{cases} y_o = y(t_o) = 705m \\ v_o = v(t_o) = 117\,m/s \\ a_y = g \end{cases}$$



Nella seconda fase, aperto il paracadute, nasce una reazione frenante diretta verso l'alto

$$ma_y = mg - bv_y \quad \text{da cui si ricava l'eq.diff.} \quad \frac{dv_y}{v_y - \left(\frac{mg}{b}\right)} = -\left(\frac{b}{m}\right)dt \quad \text{per } t>t_o$$

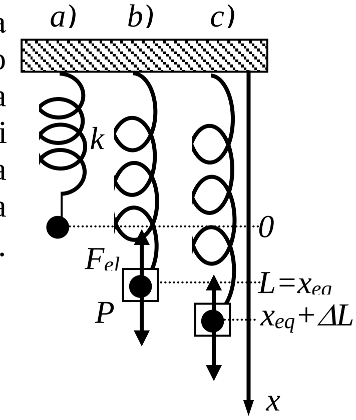
con soluzione $v_y(t) = \left(\frac{mg}{b}\right) + \left(v_o - \frac{mg}{b}\right)\exp\left[-\left(\frac{b}{m}\right)(t - t_o)\right]$

mentre lo spaio percorso si ottiene dalla $v(t) = \frac{dy}{dt}$ da cui $y(t) = y_o + \int_{to}^{t} v(t)dt$

Dopo alcuni passaggi si ottiene $y(t) = y_o + \left(\frac{mg}{b}\right)(t - t_o) + \left(v_o - \frac{mg}{b}\right)\frac{m}{b}\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{b}{m}\right)(t - t_o)\right]\right\}$

Al tempo t=t$_o$+5s=17s si ottiene **y(t)=983.5 m**.

3. L'asse x è orientato lungo la verticale: $x=0$ è la posizione dell'estremo libero della molla (a). Quando viene applicata la massa m il sistema subisce un allungamento statico raggiungendo una nuova posizione di equilibrio x_{eq} (b) che viene determinata imponendo che la forza peso $P=mg$ e la forza di richiamo elastica $F_{el}=kx_{eq}$ si equilibrino da cui $x_{eq}=L=mg/k$. Dall'allungamento statico L si può quindi ricavare la costante elastica della molla $k=mg/L$. Se allunghiamo ulteriormente la massa di una quantità ΔL dalla nuova posizione di equilibrio (c), il sistema è fuori equilibrio. Applicando il II principio si ha

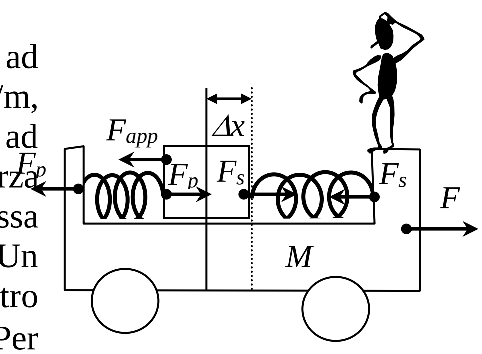


$ma_x = mg - kx$ da cui l'eq. diff. $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x(t) = g$

la cui soluzione è $x(t) = x_{omo}(t) + x_{eq} = A\cos(\omega_o t + \varphi) + L$

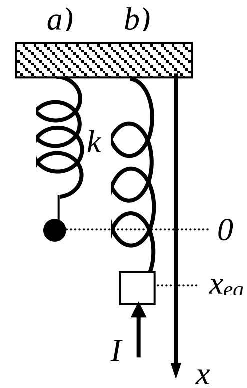
Essendo la massa inizialmente ferma nella posizione $x(t=0)=L+\Delta L$ è facile ricavare i valori $A=\Delta L$ e $\phi=0$ per cui $x(t) = L + \Delta L\cos(\omega_o t)$ con $\omega_o = \sqrt{k/m} = \sqrt{mg/mL} = \sqrt{g/L}$. Il valore della frequenza delle oscillazioni vale quindi $f = \omega_o/2\pi = \sqrt{g/L}/2\pi = 0.91Hz$. Per il calcolo dell'accelerazione basta derivare nel tempo due volte la funzione x(t) ottenendo $a(t) = -\Delta L\omega_o^2\cos(\omega_o t)$ che ha valore massimo $a_{\max} = \Delta L\omega_o^2 = g\,\Delta L/L = 1.63\text{m/s}^2$

4. Le due molle in parallelo sulla sinistra sono equivalenti ad una unica molla di costante elastica $k_p=k+3k=4k=8$N/m, mentre le due molle in serie sulla destra sono equivalenti ad una unica molla $k_s=(4k*4k)/(4k+4k)=2k=4$N/m. La forza esterna F causa una accelerazione a_t del carrello. La massa interna si trova quindi in un sistema non inerziale. Un osservatore in tale riferimento vede la massa spostarsi indietro di una quantità Δx rispetto alla posizione di equilibrio. Per spiegarsi tale spostamento l'osservatore deve applicare il II principio



aggiungendo alle forze reali una forza apparente $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t$ contraria al moto. Le forze agenti sulla massa m sono: sulla verticale la reazione normale R_n che equilibra la forza peso P; sull'orizzontale le due forze elastiche entrambe dirette nel verso del moto e di valore $F_{p/s} = k_{p/s}\Delta x$ dipendente della costante elastica $k_{p/s}$, la forza apparente $F_{app} = ma_t$ contraria al moto. Queste forze si equilibrano e la massa m rimane in quiete. La condizione $F_p + F_s = F_{app}$ si scrive $(k_p + k_s)\Delta x = ma_t$ dalla quale non è però possibile ricavare Δx senza conoscere a_t. Si applichi ora il II principio al carrello. Lungo l'asse orizzontale c'è la forza F e le forze elastiche delle due molle agenti sulle pareti del carrello, questa volta entrambe contrarie al moto. Il II principio si scrive $F - F_p - F_s = Ma_t$. Riassumendo le due equazioni della massa e del carrello sono $\begin{cases}(k_p + k_s)\Delta x = ma_t \\ F - (k_p + k_s)\Delta x = Ma_t\end{cases}$ da cui si ricava $a_t = F/(m+M)$, e $\Delta x = Fm/[(k_p + k_s)(m+M)]$=2 cm

5. L'asse *x* è orientato lungo la verticale facendo coincidere *x=0* con la posizione a riposo dell'estremo libero della molla (a). Quando viene applicata la massa *m* il sistema subisce un allungamento statico raggiungendo una nuova posizione di equilibrio $x_{eq}=L=mg/k$. Quando si applica un impulso verso l'alto (negativo) questo porta ad oscillazioni del tipo



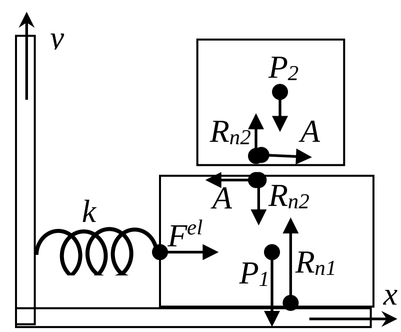
$\begin{cases} x(t) = x_{eq} - A\sin(\omega t) \\ v(t) = -A\omega\cos(\omega t) \end{cases}$ dove si è scelto la funzione seno perché nulla al tempo t=0, con verso negativo perché la velocità iniziale data dall'impulso sarà contraria all'asse x. Infatti l'impulso produrrà una variazione di quantità di moto $I_x = mv_x(0) = -mA\omega$

da cui si ricava $A = \dfrac{-I}{m\omega} = \dfrac{-I}{\sqrt{mk}}$ =7.1 cm, mentre il periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ =4.44 s

In regime di oscillazioni forzate, esaurito il transitorio la molla oscillerà con una ampiezza $A(\omega) = \dfrac{F}{\sqrt{m^2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$.

Il valore dell'ampiezza varia con il periodo forzante: A(2s) =6.4 cm , A(4s) =107 cm, A(4.5 s) =982 cm, A(5s) =118cm, A(10s) =31 cm. Si noti come nelle vicinanze della frequenza di risonanza le oscillazioni si rafforzano incredibilmente al punto da prevedere teoricamente oscillazioni irrealistiche dell'ordine del metro!

6. Lo studio dinamico verrà inizialmente applicato al sistema formato dalle due masse, la n.1 in basso e la n.2 in alto. Elenchiamo ora le forze esterne al sistema: le forze peso $P_1=Mg$ e $P_2=mg$ di entrambe le masse (applicate nei rispettivi baricentri), la forza elastica $F_{el}=k\Delta l$ fornita dalla molla alla massa n.1, la reazione normale R_{n1} che sostiene la massa n.1. Tutte le altre forze di attrito *A* e di reazione normale R_{n2} fra le due masse, sono forze interne del sistema. La loro peculiarità è che agiscono in un verso sulla massa n.1 e nel verso opposto sulla n.2. La somma vettoriale per il principio di azione e reazione è quindi nulla e non influisce sul moto del centro di massa che dipende dalle sole forze esterne P_1 , P_2 , F_{el} ed R_{n1}.



L'accelerazione del sistema vale $a_c = k\Delta l/(M+m)$

(come si può ricavare dalla prima equazione cardinale proiettata lungo *x* $F_{el} = k\Delta l = (M+m)a_c$)

Proiettando le forze agenti sul corpo n.2 lungo x si ottiene $A = ma_2 \le A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s mg$

Da cui l'accelerazione del corpo n.2 vale al massimo $a_2 \le \mu_s g$

Imponendo che le accelerazioni siano uguali per impedire movimenti relativi $a_c = a_2 \Rightarrow k\Delta l/(M+m) \le \mu_s g$ da cui $m \ge \dfrac{k\Delta l}{\mu_s g} - M$ = 2.38 kg

Il periodo delle oscillazioni libere è $T = 2\pi\sqrt{(m+M)/k}$ = 1.59 s