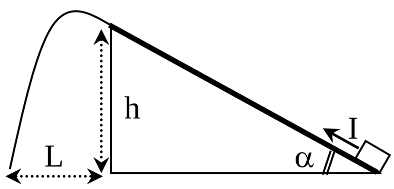
FISICA

A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
4° prova - 20 Marzo 2025

1. Su di un piano inclinato liscio inclinato di 40° rispetto all'orizzontale, un corpo di massa m=5kg è trattenuto in equilibrio da una forza applicata parallelamente al piano inclinato. Calcolare il valore di tale forza e della reazione normale. Determinare inoltre, nel caso tale forza venga ridotta del 50%, il tempo necessario affinché il corpo discenda dalla quota h=2 m fino a terra ed il valore dell'accelerazione di discesa.

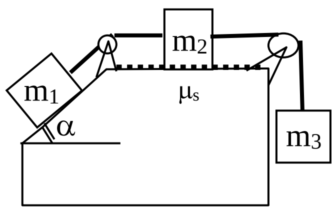
2. Un blocco di massa m=2kg è posto alla base di una rampa di lancio priva di attrito ed inclinata di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale. Al tempo t=0 il blocco viene lanciato con un impulso I=10 Ns diretto lungo la rampa. Determinare in quanto tempo il blocco raggiunge la sommità alla quota h=30cm e a quale velocità. Nei tempi successivi il blocco si distacca dalla rampa descrivendo una traiettoria parabolica. Determinare la distanza L del punto di atterraggio dalla rampa.



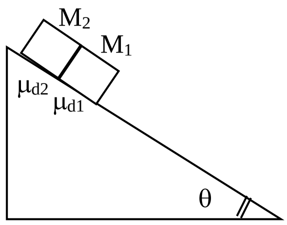
3. Un pattinatore su ghiaccio lanciato alla velocità di *10m/s* su di un piano ghiacciato orizzontale si arresta lentamente nello spazio di *120m* a causa delle forze di attrito tra pattini e ghiaccio. Determinare il coefficiente di attrito dinamico tra pattini e ghiaccio. Ricalcolare lo spazio di arresto supponendo che il piano ghiacciato sia inclinato di 1° rispetto all'orizzontale. Dare infine il valore dell'angolo del piano affinché il pattinatore si muova di moto rettilineo uniforme

4. Un blocco scivola lungo un piano liscio avente una inclinazione di θ=25°. Se il blocco parte da fermo dalla sommità e la lunghezza del piano inclinato è s=3m, trovare l'accelerazione del blocco e la sua velocità quando raggiunge il fondo. Ripetere l'esercizio supponendo che sul piano inclinato ci sia attrito (statico $\mu_s = 0.25$, dinamico $\mu_d = 0.20$).

5. Un blocco di massa m_2=10Kg è posto su di un piano orizzontale scabro caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s=0.2. Al blocco sono collegati, attraverso funi e pulegge tutte di masse trascurabili, altri due blocchi disposti come in figura; in particolare alla sinistra si trova un blocco di massa m_1=6Kg disposto su un piano liscio inclinato di α=30° rispetto all'orizzontale, mentre alla destra un blocco di massa m_3 è appeso al sistema, lungo la verticale. Determinate il valore minimo che deve avere la massa m_3 per poter trascinare tutto il sistema. Determinate l'intervallo di valori consentiti per m_3 affinché il sistema rimanga in equilibrio.



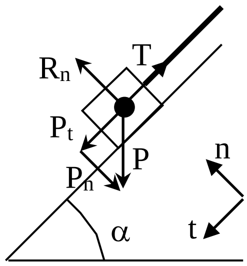
6. Due blocchi in contatto l'un con l'altro scivolano lungo un piano scabro inclinato di θ=35° rispetto all'orizzontale. Sapendo che il blocco anteriore M_1=3 kg è frenato da una forza di attrito di coefficiente μ_{d1}=0.8 superiore all'attrito esercitato sul blocco posteriore di massa M_2=2 kg (μ_{d2}=0.3) determinare l'accelerazione comune di caduta del gruppo dei blocchi. Determinare inoltre l'intensità delle forze interne di contatto fra i due blocchi.



FISICA

A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 4° prova

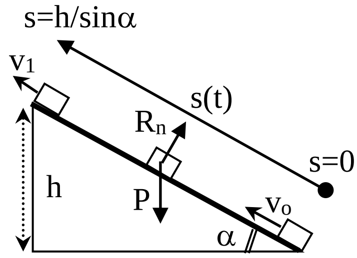
1. Le forze agenti sulla massa sono 3: la forza peso $P=mg$ diretta verticalmente, la reazione normale del piano inclinato R_n diretta lungo la normale n, e la tensione di sostegno della fune diretta lungo il piano inclinato opposta all'asse t.



Applicando il II principio e proiettando le forze sui due assi t ed n si ottiene il sistema
$$\begin{array}{l} \hat{n} \\ \hat{t} \end{array}\begin{cases} R_n - P_N = ma_N = 0 \\ P_t - T = ma_t = 0 \end{cases}$$
dove la forza peso viene decomposta secondo le sue proiezioni lungo gli assi t ($P_t=P\sin\alpha$) ed n ($P_n=P\cos\alpha$). Dalla seconda ricaviamo il valore della tensione $T = P_t = mg\sin\alpha = 31.5$ N.

Se la tensione viene ridotta del 50% al nuovo valore $T^* = P_t/2 = 15.7$ N, il blocco non può più rimanere in quiete e scivola a valle con accelerazione
$$a_t = \frac{P_t - T^*}{m} = \frac{P - T/2}{m} = \frac{P_t}{2m} = \frac{g}{2}\sin\alpha = 3.15 \text{ m/s}^2$$

2. Il blocco è inizialmente fermo con quantità di moto nulla. Immediatamente dopo l'applicazione dell'impulso il blocco acqista una velocità inziale di lancio aumentando la propria quantità di moto $\Delta p = mv_o = I$ da cui si ricava la velocità iniziale $v_o = I/m = 5$m/s.



Nella salita il blocco è soggetto alla forza peso P ed alla reazione normale R_n . Proiettando le forze lungo la normale e la tangenziale si ottiene:
$$\begin{array}{l} \hat{n} \\ \hat{t} \end{array}\begin{cases} R_n - P\cos\alpha = 0 \\ -P\sin\alpha = ma \end{cases}$$
da cui la **decelarazione** di salita $a = -g\sin\alpha$

per integrazione si ottiene la **velocità** $\quad v(t) = v_o - gt\sin\alpha$

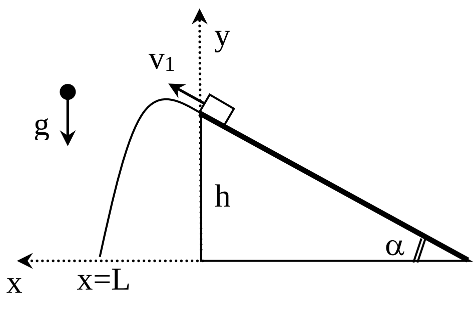
e per ulteriore integrazione lo **spazio percorso** $\quad s(t) = v_o t - gt^2\sin\alpha/2$

Il **tempo di salita t*** si ottiene imponendo $s(t^*) = v_o t - gt^2\sin\alpha/2 = h/\sin\alpha$ e risolvendo la relativa equazione di 2° grado che fornisce la soluzione $t^* = \left(\dfrac{v_o - \sqrt{v_o^2 - 2gh}}{g\sin\alpha}\right) = 128$ ms. Si noti che è stata scartata la seconda soluzione con il segno + davanti al radicale. Questa corrisponderebbe ad un tempo successivo t**. Infatti se la rampa fosse infinitamente lunga il blocco, raggiunta la quota h nell'istante t*, la oltrepasserebbe per poi ridiscendervi a questo istante successivo t**

La **velocità di uscita** dalla rampa è quindi $v_1 = v(t^*) = v_o - gt^*\sin\alpha = \sqrt{v_o^2 - 2gh} = 4.37$ m/s.

Moto parabolico successivo all'istante t*:
Assumiamo di azzerare nuovamente il cronometro cominciando a contare il tempo t a partire da t*.
Le equazioni cinematiche divengono ora

lungo x $\begin{cases} x(t) = v_1 t\cos\alpha \\ v_x = v_1\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$ lungo y $\begin{cases} y(t) = h + v_1 t\sin\alpha - gt^2/2 \\ v_y = v_1\sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

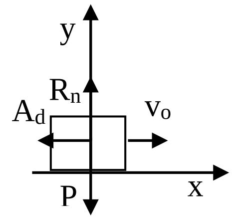


il tempo di volo del grave si ottiene dall'equazione:

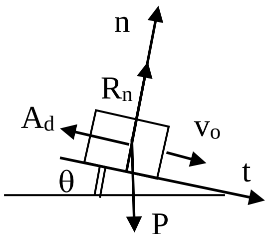
$y(t_v) = h + v_1 t_v \sin\alpha - g t_v^2/2 = 0$ da cui $t_v = \frac{v_1}{g}\left[\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v_1^2}}\right]$

da cui si ricava la gittata $L = \frac{v_1^2}{g}\left[\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v_1^2}}\right]$ = 2.10 m

3. Studio della dinamica: sul pattinatore agiscono 3 forze, la forza peso P la reazione normale R_n e l'attrito dinamico A_d. Il peso e la reazione normale si equilibrano lungo l'asse y ($R_n=P=mg$). Lungo l'asse x rimane solo l'attrito dinamico $ma_x = -A_d = -\mu_d R_n = -\mu_d mg$, che è responsabile di una decelerazione costante $a_x=-\mu_d g$ (moto uniformemente ritardato). **Studio della cinematica**: integrando l'accelerazione si ottiene la velocità $v(t) = v_o - \mu_d g t$ (dove v_o è la velocità iniziale).

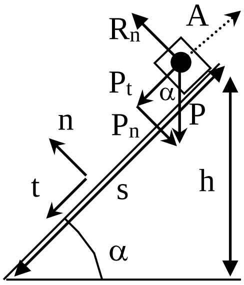


Integrando ulteriormente si ottiene lo spazio percorso $x(t) = v_o t - \mu_d g t^2/2$. L'istante di arresto si ottiene annullando la velocità $v(t^*)=v_o-\mu_d g t^*=0$ da cui $t^* = v_o/\mu_d g$; a quell'istante il pattinatore ha percorso lo spazio $s = x(t^*) = v_o^2/(2\mu_d g)$. Il valore di μ_d si ottiene invertendo l'espressione trovata $\mu_d = v_o^2/2gs = 0.043$. Nel caso di piano ghiacciato inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale le 3 forze vanno proiettate lungo gli assi normale (n) e tangenziale (t). Le equazioni sono quindi $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - mg\cos\theta = 0 \\ mg\sin\theta - A_d = ma_t \end{cases}$ dove la forza peso P è stata decomposta in P_t=mgsin(θ) e P_n=mgcos(θ). Dalla prima equazione ricaviamo $R_n = mg\cos\theta$, dalla seconda ricaviamo invece l'accelerazione di discesa



$a_t = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = -0.2456$ che per θ=1° rimane ancora negativa (moto uniformemente ritardato). Il nuovo spazio percorso fino all'arresto diviene $s = v_o^2/2|a_t|$ =203.6 m. Inclinando ulteriormente il piano si può ottenere anche a_t=0 (moto rett. uniforme) per $\theta = \arctan(\mu_d) = 2° 26'$.

4. **Studio della dinamica**: in assenza di attrito le forze agenti sul blocco sono 2: la forza peso $P=mg$ diretta verticalmente e la reazione normale del piano inclinato R_n diretta lungo la normale n. Applicando il II principio e proiettando le forze sui due assi t ed n si ottiene $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P_n = ma_n = 0 \\ P_t = ma_t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R_n = P_n = mg\cos\alpha \\ a_t = g\sin\alpha \end{matrix}$ dove la forza peso è stata decomposta secondo le sue proiezioni lungo gli assi t ($P_t=P\sin\alpha$) ed n ($P_n=P\cos\alpha$). **Studio della cinematica**: l'accelerazione di caduta è $a_t = g\sin\alpha$ =4.14 m/s² (moto unif. accelerato). Integrando la velocità vale $v(t) = a_t t$ (velocità iniziale nulla). Integrando lo spazio percorso è $s(t) = a_t t^2/2$. L'istante t^* al quale il blocco raggiunge la base del piano inclinato si ottiene imponendo $s(t^*)=a_t t^{*2}/2=s$ da cui $t^* = \sqrt{2s/a_t}$; allora il blocco raggiunge la velocità $v_{fin} = v(t^*) = a_t t^* = \sqrt{2sa_t} = \sqrt{2sg\sin\alpha} = \sqrt{2gh}$ =4.98 m/s (h è l'altezza iniziale del blocco). La presenza dell'attrito modifica il sistema delle equazioni in $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P_n = 0 \\ P_t - A = ma_t \end{cases}$. Dalla prima si ricava $R_n=P_n=mg\cos\alpha$, mentre dalla seconda si chiarisce la natura dell'attrito (statico o dinamico). **Ipotesi statica**: Supponiamo che il corpo sia in quiete ($a_t=0$). Il valore dell'attrito necessario per garantire questo stato è $A_s=P_t=mg\sin\alpha$. L'ipotesi è corretta se l'attrito richiesto risulta inferiore a quello massimo disponibile $A=P_t=mg\sin\alpha \le \mu_s R_n=\mu_s mg\cos\alpha$ da cui $tg(\alpha) \le \mu_s$ che porta all'assurdo



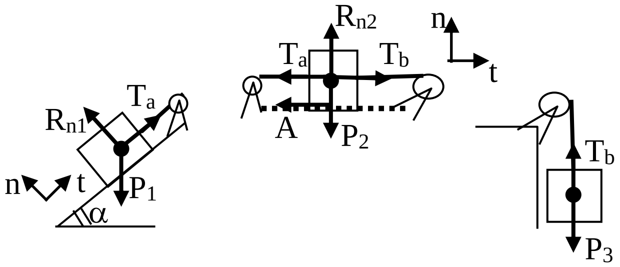
$tg(25°) = 0.466 \leq 0.25$. L'ipotesi statica non è soddisfatta. Il corpo si muove con una accelerazione $a_t = (P_t - A_d)/m$ dove l'attrito dinamico vale $A_d = \mu_d R_n = \mu_d mg\cos\alpha$. Combinando le due espressioni si ottiene una accelerazione costante di valore $a_t = g(sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)$=*2.37 m/s*^{2} (moto uniformemente accelerato). Le espressioni della velocità generica $v(t) = a_t t$, dello spazio percorso $s(t) = a_t t^2/2$, dell'istante t^* di fine corsa $t^* = \sqrt{2s/a_t}$ e della velocità finale $v_{fin} = v(t^*) = a_t t^* = \sqrt{2sa_t}$ sono analoghe al caso senza attrito. L'unica differenza è nel valore inferiore di a_t che porta alla velocità finale $v_{fin} = \sqrt{2sg(sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)}$ =*3.77 m/s.*

5. Il sistema rimane in equilibrio se la massa m_3 viene scelta nell'intervallo $M_{\min} \leq m_3 \leq M_{\max}$ Nel caso $m_3 > M_{\max}$ il sistema prende a muoversi verso destra. Nel caso $m_3 < M_{\min}$ il sistema prende a muoversi verso sinistra. I valori estremi M_{min} , M_{max} vengono calcolati imponendo l'equilibrio delle forze su ciascuna massa singolarmente. Nel caso in cui $P_3 > P_1 \sin\alpha$ abbiamo

massa m_1 ; $\begin{cases} t) \quad T_a = P_1 \sin\alpha \\ n) \quad R_{n1} = P_1 \cos\alpha \end{cases}$

massa m_2 ; $\begin{cases} t) \quad T_b - T_a - A = 0 \\ n) \quad R_{n2} = P_2 \end{cases}$

massa m_3 ; $T_b = P_3$

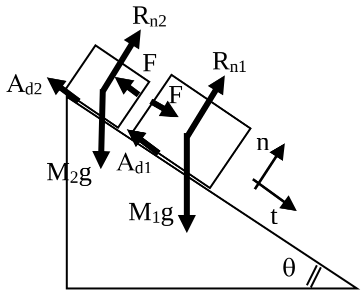


Si noti come in figura sia stato scelto un verso per la forza di attrito A corrispondente al caso $P_3 > P_1 \sin\alpha$. Il verso di A è ovviamente opposto quando invece $P_3 < P_1 \sin\alpha$. Combinando le equazioni si ottiene per la forza di attrito sul secondo blocco:

$$|A| = |T_b - T_a| = |P_3 - P_1 \sin\alpha| \leq A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s P_2 \quad \text{che ha soluzione}$$

$$m_1 \sin\alpha - \mu_s m_2 \leq m_3 \leq m_1 \sin\alpha + \mu_s m_2 \quad \text{e quindi} \quad 1Kg \leq m_3 \leq 5Kg\ .$$

6. Studio delle forze sui singoli blocchi



Blocco anteriore
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$$\begin{cases} t) \quad M_1 g \sin\theta - \mu_{d1} M_1 g\cos\theta + F = M_1 a \\ n) \quad R_{n1} = M_1 g \cos\theta \end{cases}$$

Blocco posteriore
Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t,n

$$\begin{cases} t) \quad M_2 g \sin\theta - \mu_{d2} M_2 g\cos\theta - F = M_2 a \\ n) \quad R_{n2} = M_2 g \cos\theta \end{cases}$$

Dalle espressioni lungo l'asse del moto $a = g\dfrac{(M_1 + M_2)\sin\theta - (\mu_{d1}M_1 + \mu_{d2}M_2)\cos\theta}{M_1 + M_2} =$ **0.804 m/s^2**

la forza di contatto tra i blocchi è $F = M_1(a - g\sin\theta + \mu_{d1} g\cos\theta) = \dfrac{M_1 M_2 (\mu_{d1} - \mu_{d2}) g\cos\theta}{M_1 + M_2} =$ **4.82 N**