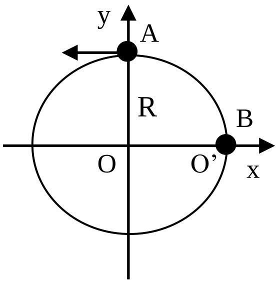
FISICA

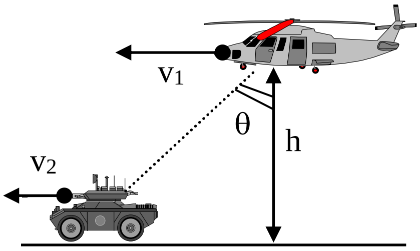
A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

3° prova del 13 Marzo 2025



1. La macchina A si muove con velocità costante v_A=100Km/h su di una traiettoria circolare di raggio R=15Km. La macchina B, vincolata a percorrere la stessa traiettoria nella stessa direzione, parte da ferma con l'intento di raggiungere la macchina A. Nella prima fase B procede mantenendo l'accelerazione tangenziale costante a_t=1m/s^2 per 1Km raggiungendo così una velocità di crociera accettabile. Nella seconda fase B procede a velocità costante. Dopo quanto tempo B raggiunge A. Determinare anche i valori delle due accelerazioni normali.



2. Un elicottero, volando a bassa quota (*h=200m*) alla velocità v_1*=200 km/h,* lascia cadere sulla propria verticale una bomba in modo da colpire un carro armato che viaggia alla velocità v_2*=50 km/h.* A quale angolo θ rispetto alla verticale il pilota deve vedere l'obiettivo al momento di sganciare la bomba? Con quale velocità ed inclinazione la bomba arriva sul carro nel sistema di riferimento solidale al carro?

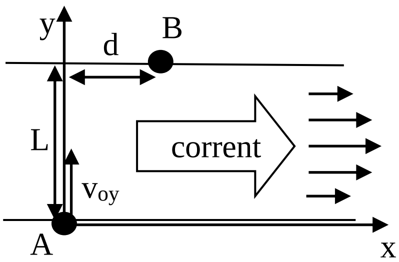
3. Un astronauta su un pianeta sconosciuto scopre che può saltare coprendo una distanza orizzontale massima di 30 m se la sua velocità iniziale è di 9m/s. Determinare il valore dell'accelerazione di gravità su tale pianeta.

4. Un proiettile viene lanciato con velocità iniziale v_o*=200m/s* e con un alzo di 10° rispetto all'orizzontale dalla sommità di un colle che domina una vallata pianeggiante. Si assuma *h=200m* l'altezza del colle rispetto alla vallata. Determinare la gittata del lancio (calcolata dalla base della collina). Determinare il raggio di curvatura della traiettoria dopo *t=1s*.

5. Un ascensore scende verso il piano terra con accelerazione diretta verso il basso di valore a=2m/s^2. Un osservatore posto all'interno dell'ascensore lancia una pallina di piombo alla velocità iniziale di v_o=4m/s. Ammettendo di poter considerare la pallina come un punto materiale, descrivere il suo moto nel sistema mobile solidale all'ascensore e nel sistema fisso. Calcolare il tempo impiegato dalla pallina per ritornare in mano all'osservatore. Ripetere l'esercizio facendo salire l'ascensore con la medesima accelerazione ma diretta verso l'alto.

6. Un treno si muove di moto rettilineo con accelerazione uniforme a=0.25 m/s^2 (rispetto alla terra). Un corpo, sul pavimento del treno, viene lanciato con velocità iniziale verticale v_o=5m/s (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento.

7. Una giostra partendo da ferma, comincia a girare con accelerazione angolare costante α=0.08 rad/s^2. Si chiede: a) in quanto tempo la giostra raggiunga la velocità di rotazione di 1/10 di giro al secondo. b) in quell'istante, il valore dell'accelerazione posseduta da un osservatore fermo sulla giostra ad una distanza di 3 metri dall'asse di rotazione. c) in quell'istante il valore dell' accelerazione dell'osservatore qualora non fosse fermo ma si spostasse radialmente verso l'asse di rotazione con velocità relativa v_r=1m/s.



8. Dovendo attraversare un fiume largo *L=50m* e puntando ortogonalmente alla riva opposta, si ha che la velocità dell'acqua è data da $v_x(y) = ky(L-y)$ con $k=5\cdot10^{-3}\ m^{-1}s^{-1}$. Partendo da A e volendo raggiungere B spostato a valle di *d=20m*, si determini con quale velocità costante v_{oy} occorre muoversi per raggiungere B ed il tempo impiegato.

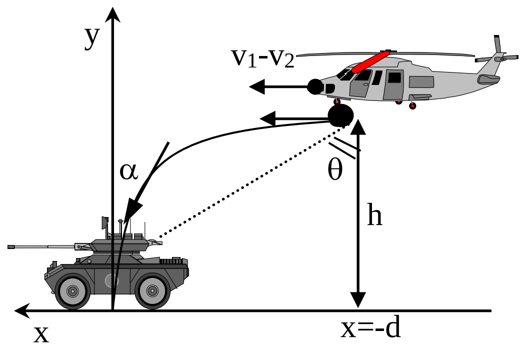
FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

Soluzioni 3°prova

1. La macchina A si muove di moto circolare uniforme alla velocità angolare costante $\omega_A = v_A/R = 1.85\ 10^{-3}$ rad/s, da cui si ottiene per la legge oraria $\varphi_A(t) = \omega_A t + \pi/2$ (rispetto all'asse x). La macchina B si muove inizialmente con accelerazione angolare $\alpha = a_t/R = 6.67\cdot 10^{-5}$ rad/s^2, velocità angolare $\omega_B(t) = \alpha t$ e legge oraria $\varphi_B(t) = \alpha t^2/2$. Il termine della prima fase della rincorsa avviene quando la macchina B ha percorso la distanza di 1Km che corrisponde all'angolo $\varphi_1 = 6.67\cdot 10^{-2}$rad. Imponendo $\varphi_B(t_1) = \alpha t^2/2 = \varphi_1$ si calcola il tempo al quale termina la prima fase $t_1 = \sqrt{2\varphi_1/\alpha} = 44.72$ s, la velocità angolare raggiunta $\omega_1 = \omega_B(t_1) = \alpha t_1 = \sqrt{2\alpha\varphi_1} = 2.98\ 10^{-3}$ rad/s, la quale risulta maggiore della velocità angolare della macchina A. Nella seconda fase, che ha inizio al tempo t_1, la macchina B procede alla velocità angolare acquisita ω_1 di moto circolare uniforme con legge oraria $\varphi_B(t) = \omega_1(t - t_1) + \varphi_1$. Per determinare il tempo t_{fin} al quale B raggiunge A basta imporre $\varphi_B(t_{fin}) = \varphi_A(t_{fin})$ e cioè $\omega_1 t_{fin} - \omega_1 t_1 + \varphi_1 = \omega_A t_{fin} + \pi/2$ da cui si ricava $t_{fin} = \dfrac{\omega_1 t_1 - \varphi_1 + \pi/2}{\omega_1 - \omega_A} = \dfrac{2\varphi_1 - \varphi_1 + \pi/2}{\sqrt{2\alpha\varphi_1} - \omega_A} = \dfrac{0.0667 + 1.571}{(2.98 - 1.85)\cdot 10^{-3}} = 1452$ s. A quell'istante le accelerazioni normali valgono rispettivamente $a_{nA} = \omega_A^2 R = 0.051$ m/s^2 e $a_{nB} = \omega_B^2 R = 0.133$ m/s^2



2. Nel sistema di riferimento di un osservatore nel carro armato l'elicottero vola alla velocità differenza v_1-v_2=*150 km/h,* che coincide anche con la velocità iniziale della bomba. Il moto parabolico della bomba può essere scomposto secondo gli assi *x* $\begin{cases} v_x = v_1 - v_2 \\ x(t) = (v_1 - v_2)t - d \end{cases}$ ed *y* $\begin{cases} v_y = -gt \\ y(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$. La bomba tocca il suolo al tempo *t** che si ottiene dall'equazione $y(t^*)=0=h-g(t^*)^2/2$ da cui $t^* = \sqrt{2h/g}$. A quell'istante l'ascissa della bomba deve coincidere con quella del carro armato $x(t^*) = (v_1 - v_2)t^* - d = 0$, da cui si ricava la distanza $d = (v_1 - v_2)t^* = (v_1 - v_2)\sqrt{2h/g}$. La tangente dell'angolo di vista θ richiesto è proprio uguale al rapporto dei due cateti $\tan\theta = d/h = (v_1 - v_2)\sqrt{2/gh}$ =1.33 da cui $\theta = 53°05'$. La velocità finale con cui la bomba arriva sul carro, nel sistema di riferimento solidale al carro, è scomposta nelle due componenti $v_x = v_1 - v_2 = 41.7$ m/s e $v_y = -gt^* = -\sqrt{2gh} = 62.6$ m/s. La velocità finale è quindi $v_{fin} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 75.2$ m/s, con angolazione lungo la verticale $\alpha = arc\tan(|v_x/v_y|) = 33°40'$.

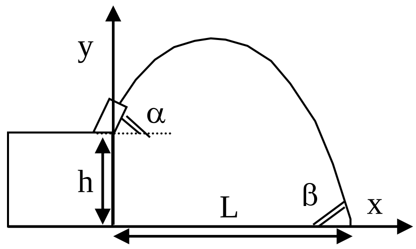
3. Il moto dell'astronauta è un tipico moto parabolico. E' facile dimostrare come la gittata, ossia la distanza fra il punto di partenza ed il punto di atterraggio valga $L(\alpha) = v_o^2 sin(2\alpha)/g_p$ dove g_p è l'accelerazione di gravità del pianeta, v_o=*9m/s* il modulo della velocità iniziale, α è l'angolo di salto rispetto all'orizzontale. La gittata è ovviamente massima per α=π/4 e vale $L_{\max} = v_o^2/g_p$ da dove possiamo calcolare l'accelerazione del pianeta $g_p = v_0^2/L_{\max} = \dfrac{81 m^2/s^2}{30 m} = 2.7\, m/s^2$

4. Il tempo di volo del proiettile *t** si ottiene imponendo *y(t*)=0* da cui si ottiene l'equazione di secondo grado $t^2 - \left[2v_o sin(\alpha)/g\right]\cdot t - 2h/g = 0$ che ha due soluzioni di cui quella accettabile è

$$t^* = \frac{v_o sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_o sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2gh}{v_o}} = v_o/g\left(sin(\alpha) + \sqrt{sin^2(\alpha) + 2gh/v_o^2}\right)$$

da cui la gittata risulta

$$L = x(t^*) = v_o^2/g\left[\cos(\alpha)\left(sin(\alpha) + \sqrt{sin^2(\alpha) + 2gh/v_0^2}\right)\right] = \mathbf{2137\ m}$$



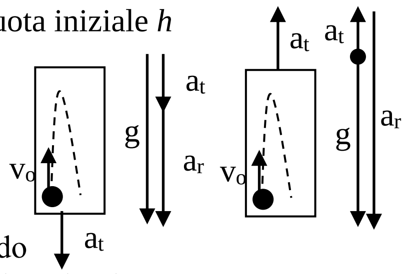
$$\begin{cases} y(t) = h + v_o sin(\alpha)\cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_o sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

Per il calcolo del raggio di curvatura basta calcolare la velocità e l'accelerazione tangenziale al tempo t=1s. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + (gt)^2 - 2v_o gtsin(\alpha)} = 193.36\,m/s$ mentre l'accelerazione tangenziale è $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t - v_o g sin(\alpha)}{\sqrt{v_o^2 + (gt)^2 - 2v_o gtsin(\alpha)}} = -6.5\,m/s^2$ da cui ricaviamo l'accelerazione normale $a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = 7.33\,m/s^2$ da cui il raggio di curvatura $\rho = v^2/a_n = 5098\,m$.

5. Nel sistema fisso l'ascensore scende con accelerazione a_t a partire da una quota iniziale *h*

$\begin{cases} y = h - a_r t^2/2 \\ v_y = -a_r t \\ a_y = -a_r \end{cases}$ mentre la pallina descrive il moto $\begin{cases} y = h + v_o t - gt^2/2 \\ v_y = v_o - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

imponendo $y_{ascensore}(t^*) = y_{pallina}(t^*)$ si trova il tempo $t^* = 2v_o/(g - a_t) = 1.03$ s



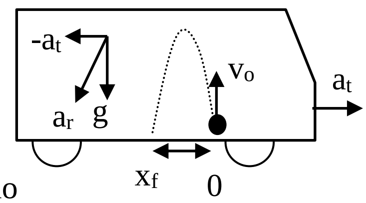
Nell'ascensore l'accelerazione relativa, avvertita all'interno, si ottiene sottraendo l'accelerazione di trascinamento (a_t) all'accelerazione assoluta (g) : $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t = \vec{g} - \vec{a}_t$

Le grandezze cinematiche nel mobile sono $\begin{cases} y = v_o t - a_r t^2/2 \\ v_y = v_o - a_r t \\ a_y = -(g - a_t) = -a_r \end{cases}$ con tempo di volo $t^* = \frac{2v_o}{g - a_t} = 1.03$ s

Rivoltando il verso dell'accelerazione di trascinamento il tempo diviene $t^* = 2v_o/(g + a_t) = 0.68$ s

6. L'accelerazione relativa avvertita all'interno del treno si ottiene sottraendo l'accelerazione di trascinamento del treno (a_t) all'accelerazione assoluta (g) :

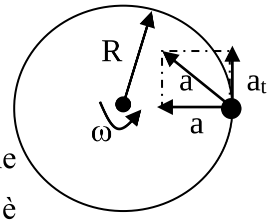
$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t = \vec{g} - \vec{a}_t$$



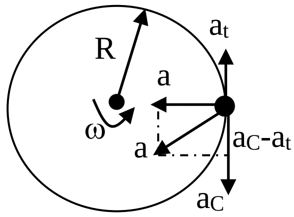
Proiettando l'accelerazione relativa lungo gli assi tangenziale (x) e normale (y) si ottengono le sue due componenti $a_{rx} = -a_t$ ed $a_{ry} = -g$ che integrate danno

lungo l'asse x e lungo l'asse y $\begin{cases} y = v_o t - gt^2/2 \\ v_{ry} = v_o - gt \\ a_{ry} = -g \end{cases}$. Il tempo di volo si ottiene imponendo y(t*)=0 da cui t*=2v$_o$/g=1.02 s. Il punto di ricaduta è quindi $x_f = x(t^*) = -\frac{1}{2}a_t t^{*2} = -2v_o^2 a_t/g^2 =$ -0.13 m ad una distanza di 13 cm dal punto di lancio e nel senso opposto a quella dell'accelerazione del treno.

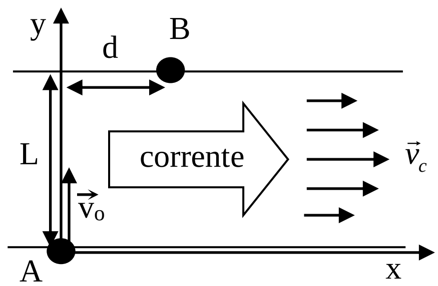
7. La giostra ruota con accelerazione angolare costante secondo le Eq. $\begin{cases} \varphi(t) = \alpha_0 t^2/2 \\ \omega(t) = \alpha_o t \\ \alpha = \alpha_o \end{cases}$



Il tempo al quale la velocità di rotazione raggiunge 0.1 giro al secondo è
$\omega^* = \omega(t^*) = \alpha_o t^* = 0.1 \cdot 2\pi = 0.628 rad/s$ ossia $t^* = 7.854$ s.
A quel tempo l'accelerazione tangenziale vale $a_t = \alpha_o R = 0.24$ m/s^2, l'accelerazione normale vale $a_n = \omega^{*2} R = \alpha_o^2 R t^{*2} = 1.184$ m/s^2, e quindi l'accelerazione totale è $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 1.208$ m/s^2. Se l'osservatore si muove in direzione radiale subisce anche una accelerazione di Coriolis $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ di intensità $a_C = 2\omega^* v_r = 2\alpha_o t^* v_r = 1.257$ m/s^2 nella direzione tangenziale ma in senso opposto ad $\vec{a}_t$ (come riportato in figura). La nuova accelerazione tangenziale a_t' complessiva si ottiene quindi per sottrazione $a_t' = a_C - a_t = 1.017$ m/s^2
che combinata insieme all'accelerazione normale precedente dà luogo a $a = \sqrt{a_n^2 + a'^2_t} = \sqrt{a_n^2 + (a_C - a_t)^2} = 1.561$ m/s^2.



8. La velocità del natante nel sistema fisso, solidale con la terra, è $\vec{v}_a = \vec{v}_o + \vec{v}_c$ dove $\vec{v}_o$ rappresenta la velocità che il natante ha nel sistema di riferimento solidale con l'acqua, mentre $\vec{v}_c$ è la velocità di trascinamento della corrente. La velocità del natante, decomposta secondo x e y è riportata nel riquadro. Il tempo impiegato a raggiungere l'altra sponda t^* si calcola dal moto lungo y imponendo $y(t^*)=L$ da cui $t^*=L/v_o$ quantità al momento incognita! Dal moto lungo l'asse x ricaviamo invece la condizione per il raggiungimento al tempo t^* del punto B. Si deve quindi imporre $x(t^*)=d$ dove però $x(t)$ è l'integrale nel tempo della velocità della corrente $v_x(y)$. Osserviamo come nel termine di velocità non compaia direttamente il tempo ma solo l'ordinata y che però è a sua volta funzione del tempo. Il risultato dell'integrazione riportato genericamente nel riquadro vale nel nostro caso (x_o=0)



$$\begin{cases} y(t) = v_o t \\ v_y = v_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(t) = x_o + \int_o^t v_x(y(t))dt \\ v_x(y(t)) = k \cdot y(t) \cdot (L - y(t)) \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t k \cdot y(t) \cdot (L - y(t))dt = kv_o \int_0^t t(L - v_o t)dt = kv_o \left\{ L \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^t - v_o \left| \frac{t^3}{3} \right|_0^t \right\} = kv_o t^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{v_o t}{3} \right)$$ che al

tempo $t^*=L/v_o$ vale $x(t^*)=d=$ $kv_o \dfrac{L^2}{v_o^2}\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{3}\right) = \dfrac{kL^3}{6v_o}$ da cui ricaviamo

$v_o = \dfrac{kL^3}{6d} = \dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot (50)^3}{6 \cdot 20} = 5.2$ *m/s*, da cui il tempo $t^*=L/v_o$ $t^* = L/v_o = \dfrac{6d}{kL^2} = 9.6s$.