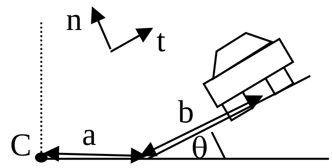
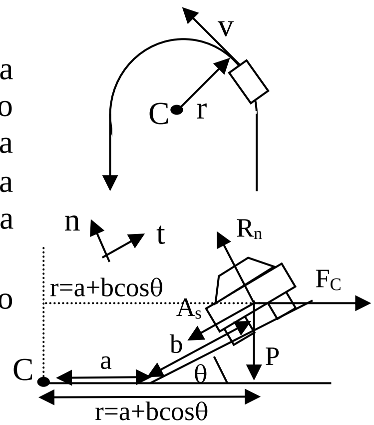
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale (M-Z)
3 Appello del 9 settembre 2024 – Soluzioni

1. Testo. In un autodromo una macchina (di massa m=200 kg) affronta la curva parabolica (la cui sezione è indicata in figura) alla velocità massima consentita dal coefficiente di attrito con la pista μ_s=0.4. Determinare il valore della massima velocità assumendo per i parametri della pista a=10 m, b=4 m, θ=30°
Determinare inoltre di quanto si inclina (rispetto alla normale n) un filo a piombo libero di oscillare all'interno dell'abitacolo.



1. Soluzione.
Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al pilota, la macchina è soggetta a 4 forze: la forza peso **P=mg** diretta lungo la verticale, la reazione normale $\mathbf{R_n}$ lungo la normale *n*, la forza centrifuga $\mathbf{F_c=mv^2/r}$ lungo la radiale della circonferenza descritta dalla macchina (**r=a+bcosθ** si calcola rispetto all'asse di rotazione), la forza di attrito statico $\mathbf{A_s}$ lungo l'asse tangenziale ma in discesa *t*. Nel sistema solidale al pilota l'auto è in equilibrio e le 4 forze si equilibrano perfettamente $\vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{c}} + \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{n}} + \vec{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{s}} = \mathbf{0}$. Proiettando l'equazione lungo gli assi n,t ed imponendo l'equilibrio su entrambi gli assi



$$\begin{cases} R_n = P\cos\theta + F_c \sin\theta \\ A_s = F_c \cos\theta - P \sin\theta \end{cases}$$

A posteriori imponiamo la disequazione di verifica che l'attrito richiesto sia inferiore a quello massimo $A_s \le A_{\max} = \mu_s R_n$ da cui si ottiene $F_c \cos\theta - P\sin\theta \le \mu_s(P\cos\theta + F_c \sin\theta)$

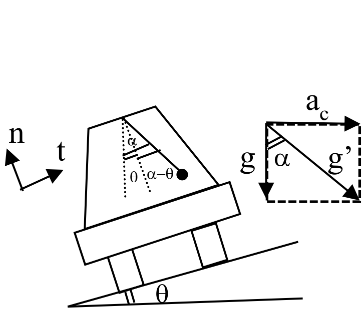
Infine esplicitando F_C si ottiene: $F_c \le P\frac{\mu_s cos\theta + sin\theta}{cos\theta - \mu_s sin\theta} = P\frac{\mu_s + tan\theta}{1-\mu_s tan\theta}$ da cui

la **velocità massima** $v \le \sqrt{gr}\sqrt{\frac{\mu_s + tan\theta}{1-\mu_s tan\theta}} = \sqrt{g(a+bcos\theta)}\sqrt{\frac{\mu_s + tan\theta}{1-\mu_s tan\theta}}$ **=12.95 m/s = 46.6 km/h**

All'interno dell'abitacolo il filo a piombo risente di una accelerazione relativa **g'** somma vettoriale dell'accelerazione di gravità **g** e della accelerazione dovuta alla forza centrifuga $\mathbf{a_c}$

$$a_c = \frac{v_{max}^2}{r} = g\frac{\mu_s + tan\theta}{1-\mu_s tan\theta} = g\frac{tan\varphi + tan\theta}{1 - tan\varphi \cdot tan\theta} = g \cdot tan(\varphi+\theta) = \mathbf{12.45\ m/s^2}$$

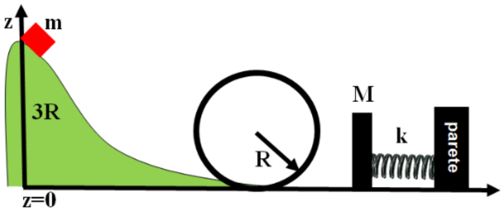
dove per il coefficiente di attrito statico vale $\boldsymbol{\mu_s = \tan\phi}$ con **ϕ=0.38** rad **≈22°** angolo di semiapertura del cono di attrito. Nell'abitacolo pertanto il filo a piombo comincia ad oscillare intorno ad una nuova posizione di equilibrio. La nuova posizione di equilibrio è quella per cui il filo si allinea lungo l'accelerazione relativa **g'** che subiscono tutti i gravi nel sistema relativo.



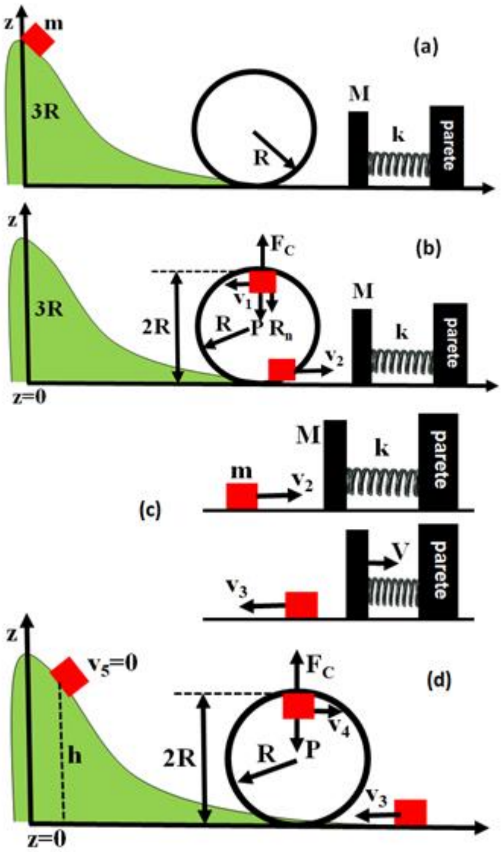
Il vettore **g'** è inclinato di un angolo **α** rispetto alla verticale che si calcola come
$tan\alpha = \frac{a_c}{g} = \frac{\mu_s + tan\theta}{1-\mu_s tan\theta} = \frac{tan\varphi + tan\theta}{1-tan\varphi \cdot tan\theta} = tan(\varphi+\theta)$ da cui $\alpha = \varphi + \theta$ **=0.904 rad ≈ 52°**

L'angolo di inclinazione del filo rispetto alla normale *n* vale quindi: $\alpha - \theta = \varphi$ **=0.38 rad ≈ 22°**

2. Testo. In un Luna Park un carrello di massa m=8 kg è fermo sulla sommità di una collinetta di altezza h=3R (ove R=4m). Il carrello scivola senza attrito a valle per poi effettuare un primo giro della morte sulla guida anulare di raggio R riportata in figura. Al termine il carrello ritorna a valle urtando elasticamente il piattello di massa M collegato ad una parete fissa verticale per mezzo di una molla di costante elastica k=500 N/m. Determinare il valore minimo della massa M del piattello che garantisce alla massa m una inversione del moto sufficiente ad effettuare il giro della morte in senso inverso. Determinare inoltre dopo l'urto la quota massima raggiunta sulla collinetta della massa m, e l'ampiezza delle oscillazioni del piattello.



2. Soluzione.
Primo giro della morte (figure a, b).
Il carrello discendendo dalla quota z=3R (*figura a*) transita alla velocità v_1 per il punto alto (z=2R, *figura b*) della guida cilindrica. La velocità v_1 si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica.



$$Em_0 = mg(3R) = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(2R)$$
da cui $v_1 = \sqrt{2gR}$ =**8.85 m/s**

Tale velocità è sufficiente per garantire il contatto fra carrello e guida lungo tutto l'anello, testimoniato dal valore positivo della reazione vincolare di sostegno nel punto critico superiore:

$$R_{n1} = F_{C1} - P = \frac{mv_1^2}{R} - mg = mg = \mathbf{78.4\ N} \qquad \text{Eq.(1)}$$

Il carrello al termine del giro ritorna alla quota di riferimento z=0 acquisendo la velocità massima v_2 che si ottiene sempre imponendo la conservazione dell'energia meccanica (*figura b*)

$$Em_0 = mg(3R) = K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$
da cui $v_2 = \sqrt{6gR}$ =**15.3 m/s**

Urto elastico (figura c)
Imponendo la conservazione sia dell'energia cinetica che della quantità di moto (prima e dopo l'urto) possono essere calcolate la **velocità v_3 del carrello m** e la **velocità V del piattello M** immediatamente **dopo l'urto**

$$\begin{cases} v_3 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v_2 + \left(\frac{2m}{m+M}\right)0 = -\left(\frac{M-m}{m+M}\right)\sqrt{6gR} \\ V = \left(\frac{2m}{m+M}\right)v_2 + \left(\frac{M-m}{m+M}\right)0 = \left(\frac{2m}{m+M}\right)\sqrt{6gR} \end{cases} \qquad \text{Eq.(2)}$$

(affinché il carrello torni indietro dopo l'urto è necessario che M>m)

Secondo giro della morte (figura d)
Il secondo passaggio per il punto alto della guida cilindrica (z=2R) avviene in condizione di velocità v_4 tale da soddisfare la condizione $R_n \geq 0$ nella Eq.1 (R_n=0 è la condizione di distacco).

$R_{n4} = F_{C4} - P = \frac{mv_4^2}{R} - mg \geq 0$ da cui $v_4 \geq \sqrt{gR}$ =**6.3 m/s**

Questa condizione si ripercuote sulla velocità v_3 a causa della conservazione dell'energia
$K_3 + \cancel{U_3} = \frac{1}{2}mv_3^2 = K_4 + U_4 = \frac{1}{2}mv_4^2 + mg(2R)$
da cui $v_3 = \sqrt{v_4^2 + 4gR} \geq \sqrt{5gR}$ =**14 m/s**

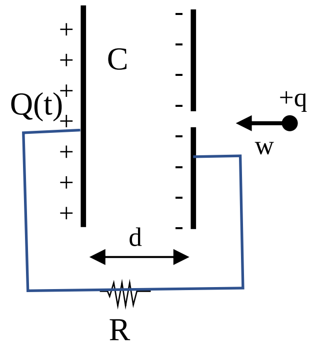
Combinando quest'ultima disequazione con l'Eq.2 si ottiene:
$\left(\frac{M-m}{m+M}\right)\sqrt{6gR} \geq \sqrt{5gR}$ da cui si ricava la **massa del piattello** $M \geq m\left(\frac{1+\sqrt{5/6}}{1-\sqrt{5/6}}\right)$ =**175.6 kg**

Una volta trovata M, la **velocità del piattello dopo l'urto** si ricava dalla Eq.(2)
$V = \left(\frac{2m}{m+M}\right)\sqrt{6gR}$=**1.34 m/s**

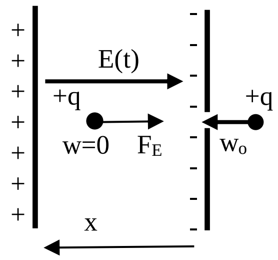
Nel moto armonico **l'ampiezza di oscillazione** del piattello è legata alla sua velocità massima:
$A = \frac{V}{\omega} = V\sqrt{\frac{M}{k}}$ =**79 cm**

Infine la quota massima raggiunta dal carrello si ottiene imponendo la conservazione energia meccanica: $K_3 + \cancel{U_3} = \frac{1}{2}mv_3^2 = \cancel{K_5} + U_5 = mgh$ dove $v_3 = \sqrt{5gR}$
da cui la quota massima raggiunta è: $h = \frac{5}{2}R$ =**10 m**

3. Testo. Un condensatore piano di sezione S=1m^2**,** di capacità C=10 μF e carica iniziale Q_o=100 μC si scarica su una resistenza R=5 kΩ. Sull'armatura negativa è praticato un piccolo foro circolare tale da non perturbare le proprietà elettriche del sistema e da consentire l'ingresso di una carica +q=2μC e di massa m=1g che viene lanciata dall'esterno verso l'interno alla velocità w=150m/s. Determinare dopo quanto tempo (a partire dall'istante in cui entra nel foro praticato nel condensatore) la carica inverte il suo moto per poi riuscire dallo stesso foro di entrata. Determinare anche quanto sarebbe stato il tempo nel caso in cui il condensatore non si fosse scaricato sulla resistenza.



3. Soluzione. Calcolo dell'accelerazione



Nel processo di scarica del condensatore la carica presente sulle armature evolve nel tempo secondo la legge esponenziale decrescente

$$Q(t) = Q_0 exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = Q_0 exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{dove } \tau=RC=\mathbf{50\ ms}$$

Il campo elettrico interno al condensatore segue quindi la legge: $E(t) = \frac{Q_0}{S\epsilon_0} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
producendo una forza elettrica sulla carica q contraria al moto: $F_{E,x} = -qE = -\frac{qQ_0}{S\epsilon_0} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
Applicando il II principio: $F_{E,x} = -qE = -\frac{qQ_0}{S\epsilon_0} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = ma_x = m\frac{dw_x}{dt}$

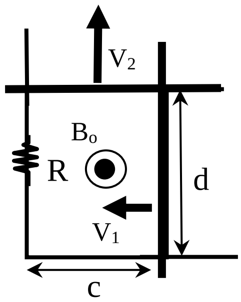
da cui: $\frac{dw_x}{dt} = -\left(\frac{qQ_0}{S\epsilon_0 m}\right) exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -a_0 exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ dove $\boldsymbol{a_o} = \left(\frac{qQ_0}{S\epsilon_0 m}\right)$ =**2.26·10^4 m/s^2**

integrando si ottiene l'espressione della velocità:
$w_x(t) = w_0 - a_0 \int_0^t exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = w_0 - a_0\tau\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

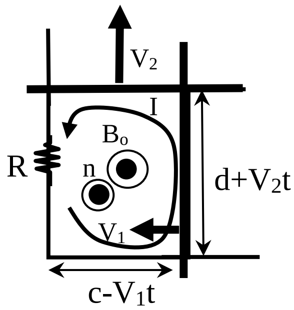
Il punto di inversione del moto si ottiene imponendo la velocità nulla e ricavando quindi l'istante di tempo: $t_1 = -\tau \cdot ln\left(1 - \frac{w_0}{a_0\tau}\right) = \tau \cdot ln\left(\frac{a_0\tau}{a_0\tau - w_0}\right)$ =**7.1 ms**

Nel caso in cui il condensatore non si fosse scaricato sulla resistenza si ha invece $w_x = w_0 - a_0 t$ da cui il tempo di inversione del moto per questo caso diminuirebbe $t_2 = \left(\frac{w_o}{a_o}\right)$ =**6.6 ms**

4. Testo. Due barrette metalliche mobili sono libere di muoversi strisciando senza attrito in modo da formare un circuito elettrico planare di forma rettangolare con lati mobili come descritto in figura (c=15 cm, d=20 cm). Tale circuito, di resistenza elettrica costante R=2 Ω, giace in una regione dove è applicato un vettore induzione magnetica uniforme diretto in verticale di intensità B_o=2 Wb/m^2. Sapendo che le due barrette vengono spostate a velocità costante rispettivamente v_1=1m/s e v_2=2m/s nei versi indicati in figura, determinare l'espressione temporale della corrente indotta nel circuito. Fornire inoltre il valore della corrente al tempo t=0, e calcolare il tempo al quale la corrente si annulla.



4. Soluzione. La spira rettangolare è disposta sul piano orizzontale. Il verso di percorrenza della corrente è antiorario così che la normale alla spira sia diretta come il vettore induzione magnetica lungo la verticale nel verso uscente dal piano



$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = B_0 \cdot [c - V_1 t] \cdot [d + V_2 t]$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_0\{[c - V_1 t]V_2 - [d + V_2 t]V_1\} = B_0\{dV_1 - cV_2 + 2V_1V_2 t\}$$

L'espressione della corrente indotta nel circuito $i(t) = \frac{f_i}{R} = \frac{B_0}{R}\{d \cdot V_1 - c \cdot V_2 + 2V_1V_2 t\}$

La corrente iniziale al tempo t=0 vale $i(0) = \frac{B_0}{R}\{d \cdot V_1 - c \cdot V_2\}$ = **-0.1 A** (in senso contrario a quello riportato in figura)

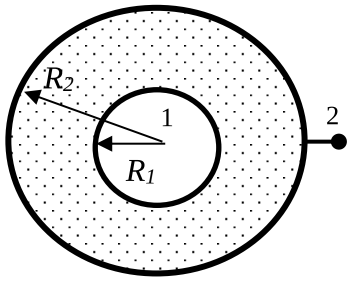
La corrente si annulla per poi invertire il verso quando $t = \frac{c \cdot V_2 - d \cdot V_1}{2V_1 \cdot V_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{V_1} - \frac{d}{V_2}\right)$ =**25 ms**

In quell'istante il lato orizzontale risulta ridotto a: $x(t) = c - V_1 t = c - \frac{1}{2}\left(c - d\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\frac{V_1}{V_2} > 0$

Il fatto che x(t)>0 ancora garantisce le ipotesi iniziali di spira come rappresentato in figura. Tali ipotesi invece cessano per tempi successivi quando t>c/V_1=**150 ms.**

Esercizi sostitutivi di elettromagnetismo previsti per il II esonero

2. Testo. Un condensatore sferico è costituito da due conduttori sferici concentrici di raggi R_1=3cm e R_2=5cm in mezzo ai quali viene omogeneamente collocato un dielettrico omogeneo di costante dielettrica relativa ε_r=3. Sapendo che tale dielettrico può sopportare un campo elettrico massimo E_{max}=10kV/m calcolare la massima carica ammissibile sulle armature e la massima differenza di potenziale applicabile fra le due armature.



2. Soluzione. In un condensatore sferico il campo elettrico è non nullo solo all'interno delle armature $R_1<r<R_2$. Il

calcolo del campo elettrico si ottiene applicando la legge di Gauss. $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2}$

Sulla armatura interna $r=R_1$ il campo elettrico raggiunge il valore più elevato che mette il dielettrico a rischio di rottura. La stabilità del condensatore è legata quindi alla seguente condizione

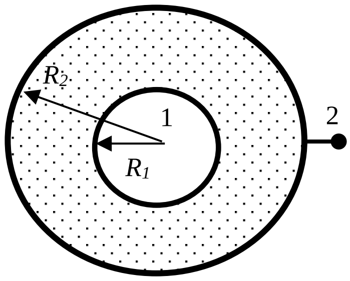
$E(R_1) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R_1^2} \le E_{\max}$ da cui la carica massima ammisibile è $Q_{\max} = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R_1^2 E_{\max}$ **=3 nC**

La differenza di potenziale fra le armature si ottiene integrando il campo elettrico tra R_1 ed R_2

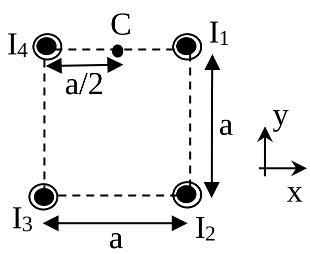
$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

La massima differenza di potenziale si ottiene quando $Q=Q_{max}$

$$\Delta V_{\max} = \frac{Q_{\max}}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} = E_{\max}\frac{R_1(R_2 - R_1)}{R_2} = \mathbf{120\ V}$$

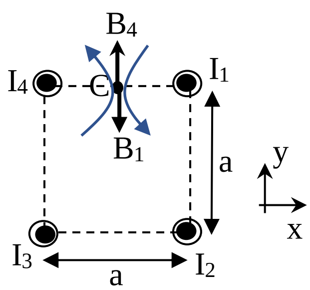


3. Testo. Quattro fili indefiniti percorsi da corrente sono posti ai vertici di un quadrato di lato *a* come indicato in figura. Si calcolino le componenti lungo gli assi *x,y* del vettore induzione magnetica presente nel punto C nel mezzo di un lato del quadrato (vedi figura). [Dati: I_1=4mA, I_2=6mA, I_3=6mA, I_4=4mA, a=1cm]

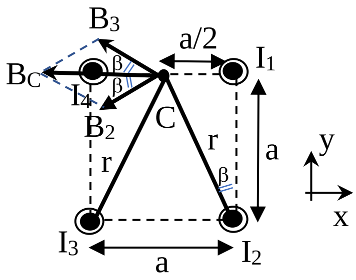


3. Soluzione.

I vettori induzione magnetica generati dai fili percorsi dalle correnti I_1 e I_4 generano nel punto C due vettori induzione magnetica opposti per ragioni di simmetria (come indicato in figura)



I fili percorsi dalle correnti I_2 e I_3 (di egual valore) generano nel punto C due vettori induzione magnetica di egual modulo,
in accordo alla legge di Biot Savart



$$\boldsymbol{B_2} = \boldsymbol{B_3} = \frac{\mu_o I_{2/3}}{2\pi r} = \frac{\mu_o I_{2/3}}{2\pi\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\mu_o I_{2/3}}{\sqrt{5}\pi a}$$

I due vettori B_2 e B_3 sono inclinati dello stesso angolo β rispetto all'asse orizzontale. La loro somma vettoriale per ragioni di simmetria dà luogo ad una risultante tutta diretta in senso opposto all'asse x

$$\boldsymbol{B_{C,x}} = -\boldsymbol{B_2} cos\beta - \boldsymbol{B_3} cos\beta = -2\boldsymbol{B_2} cos\beta = -2\left(\frac{\mu_o I_2}{\sqrt{5}\pi a}\right)\left(\frac{a}{r}\right) = -2\left(\frac{\mu_o I_2}{\sqrt{5}\pi a}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4\mu_o I_2}{5\pi a} =$$

$$= \mathbf{-1.92 \cdot 10^{-7}\ T}$$