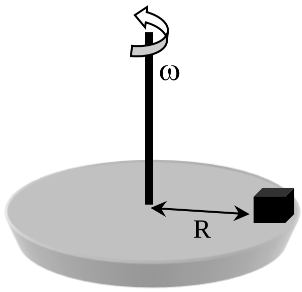
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni del II Appello del 19 Luglio 2024

1. Testo. Un piccolo blocco di massa m=10 g è posizionato su un disco rotante ad una distanza R= 50 cm dall'asse. Il disco inizialmente fermo prende a ruotare con una accelerazione angolare descritta dalla legge $\alpha=k\cdot t$ (con k=0.05 rad/s^3). Durante la rotazione, grazie alla forza di attrito, il blocco rimane solidale al disco fino all'istante t_o=10 s in cui avviene il primo distacco. Determinare il valore del coefficiente di attrito statico. Assumendo inoltre che valga $\mu_d=2\mu_s/3$, determinare il modulo e la direzione della accelerazione cui il blocco è soggetto al momento del distacco nel sistema solidale al disco (la direzione viene individuata calcolando l'angolo rispetto alla direzione radiale).



1. Soluzione. Nel sistema non inerziale solidale con il disco rotante agiscono le seguenti:

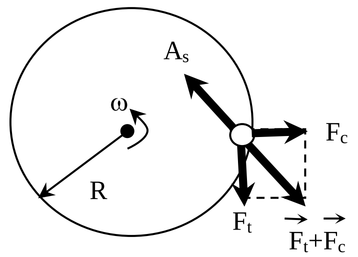
Lungo la verticale
alla forza peso $P=mg$ si oppone la reazione normale fornita dal disco $R_n=P=mg$

Nel piano orizzontale
la forza centrifuga $F_c = m\omega^2 R$ in direzione radiale esterna
la forza apparente tangenziale $F_t = m\alpha R$ in direzione ortogonale alla radiale
la forza di attrito statico A_s che è sempre sul piano e si oppone alla risultante di F_c ed F_t

Studio statico.
Il blocco rimane fermo sul disco sin quando la forza di attrito statico riesce a controbilanciare la risultante delle forze apparenti.

$$\sqrt{F_C^2+F_t^2} = \sqrt{(m\omega^2R)^2+(m\alpha R)^2} = mR\sqrt{\omega^4+\alpha^2} = A_s \le A_{max} = \mu_s mg$$

da cui $\mu_s \ge \frac{R}{g}\sqrt{\omega^4+\alpha^2} = \frac{R}{g}\sqrt{\left(\frac{1}{2}kt^2\right)^4+k^2t^2}$ dove $\omega = \int_0^t \alpha dt = \frac{1}{2}kt^2$



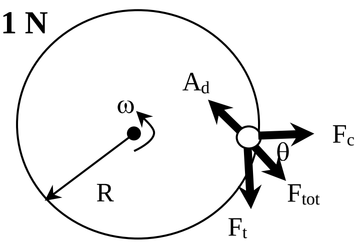
che calcolato al tempo **t_o=10 s** in cui avviene il primo distacco

permette di calcolare il **coefficiente di attrito statico μ_s=0.3**2

Calcolo della accelerazione relativa
Al distacco quindi la **risultante delle forze apparenti** vale $\sqrt{F_C^2+F_t^2} = A_{max} = \mu_s mg =$ **0.031 N**

in senso opposto la forza di **attrito dinamico** vale $A_d = \mu_d mg = \frac{2}{3}A_{max} =$ **0.021 N**

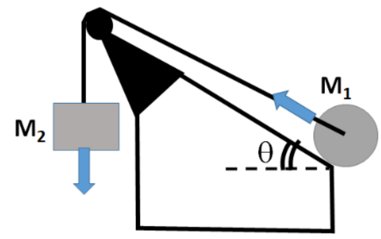
che porta per differenza ad una **forza totale** nel piano $F_{tot} = \frac{1}{3}A_{max} =$ **0.010 N**



da cui **l'accelerazione relativa** $a_r = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{1}{3}\frac{\mu_s mg}{m} = \frac{1}{3}\mu_s g =$ **1.045 m/s^2**

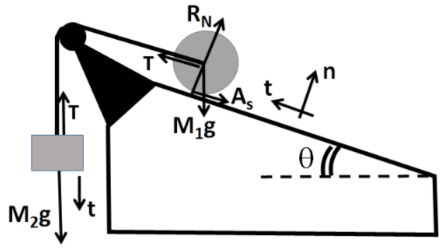
inclinata rispetto alla radiale di un angolo $\boldsymbol{\theta} = arctan\left(\frac{F_t}{F_c}\right) = arctan\left(\frac{\alpha}{\omega^2}\right)$ **= 4.57° = 4° 34'**

2. Testo. Un cilindro di raggio *r* e di massa $\mathbf{M_1}$=2 kg è posto alla base di un piano inclinato di angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Un blocco di massa $\mathbf{M_2}$ è collegato all'asse del cilindro tramite fune e puleggia di masse trascurabili. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra il cilindro ed il piano inclinato vale μ_s=0.3, determinare il valore massimo per la massa M_2 per il quale viene garantito il puro rotolamento in salita del cilindro. Determinare in queste condizioni l'accelerazione di caduta del blocco M_2. [Si assuma $I_{cil}=M_1r^2/2$].



2. Soluzione. Equazioni cardinali per il cilindro

Le forze agenti sul cilindro sono:
la forza peso $\mathbf{M_1 g}$ applicata nel baricentro del cilindro;
la tensione trainante **T** applicata al baricentro lungo t ;
la reazione normale $\mathbf{R_n}$ applicata sul punto di contatto e lungo n ;
la forza di attrito statico $\mathbf{A_s}$ applicata sul punto di contatto e contraria al moto di salita lungo t.



La **1ª equazione cardinale** proiettata lungo gli assi *n,t*

$$\begin{matrix}\hat{t}\\ \hat{n}\end{matrix}\begin{cases}T - M_1 g sen\theta - A_s = M_1 a_c\\ R_n - M_1 g\cos\theta = 0\end{cases} \qquad (1)$$

La **2ª equazione cardinale** calcolata rispetto ad un asse per il baricentro (solo l'attrito fornisce il momento necessario per fare rotolare in salita il cilindro)

$A_s r = I_c \frac{d\omega}{dt} = I_c \frac{a_c}{r}$ da cui $A_s = \frac{I_c}{r^2} a_c$ dove r è il raggio del cilindro (2)

La **massa $\mathbf{M_2}$** ha una caduta in verticale controllata grazie alla tensione della fune T in accordo al 2 principio della dinamica

$M_2 g - T = M_2 a_c$ da cui $T = M_2(g - a_c)$ (3)

dove l'accelerazione di caduta del blocco M_2 coincide con quella di salita lungo il piano inclinato a_c del c.d.m. del cilindro. Inserendo le equazioni (3) e (2) nella (1) si ottiene:

$$M_2(g - a_c) - M_1 g sen\theta - \frac{I_c}{r^2} a_C = M_1 a_c$$

Dalla quale si ricava l'accelerazione di discesa del blocco M_2

$\boldsymbol{a_c = g \frac{M_2 - M_1 sen\theta}{M_2 + M_1 + I_c/r^2} = g \frac{M_2 - M_1 sen\theta}{M_2 + M_1\left(1 + \frac{I_c}{M_1 r^2}\right)} = g \frac{M_2 - M_1 sen\theta}{M_2 + \frac{3}{2} M_1}}$ (per il cilindro pieno si assume $\frac{I_c}{M_1 r^2} = \frac{1}{2}$) (4)

La verifica della condizione di puro rotolamento è sull'attrito statico:
$A_s = \frac{I_c}{r^2} a_c = \frac{I_c}{M_1 r^2} M_1 a_c = \frac{1}{2} M_1 a_c \le A_{max} = \mu_s R_n = \mu_s M_1 g \cos\theta$ da cui $a_c \le 2\mu_s g\cos\theta$

che combinata con la (4) porta alla disequazione $\boldsymbol{a_c = g \frac{M_2 - M_1 sen\theta}{M_2 + \frac{3}{2} M_1}} \le 2\mu_s g cos\theta$.

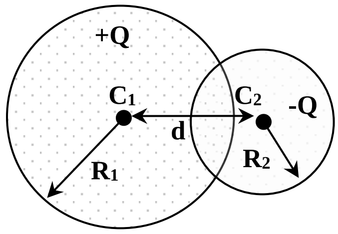
Portando il denominatore a 2° membro e semplificando l'accelerazione di gravità g

$M_2 - \boldsymbol{M_1 sen\theta} \leq 2\mu_s cos\theta \left(\boldsymbol{M_2} + \frac{3}{2}\boldsymbol{M_1}\right)$

ed esplicitando M_2 si ottiene il valore massimo richiesto : $M_2 \leq M_1 \frac{3\mu_s cos\theta + sen\theta}{1-2\mu_s cos\theta}$ = **5.33 kg**

In queste condizioni, inserendo **M_2 = 5.33 kg** nella Eq.(4) si ottiene **a_c = 5.09 m/s^2**

3. Testo. Una configurazione elettrica a carica netta nulla è costituita da una carica positiva +Q distribuita uniformemente nel volume di una sfera di raggio R_1 e di centro C_1, ed una carica opposta –Q distribuita uniformemente su di una sfera di raggio R_2 di centro C_2. La distanza fra le sfere $d=C_1C_2$ è tale per cui esiste una regione di sovrapposizione. Determinare la differenza di potenziale fra i due centri. Determinare in quale punto dell'asse C_1C_2 il campo elettrico è massimo. [**Dati**: R_1=3cm, R_2=2cm, d=4cm, Q=2nC].

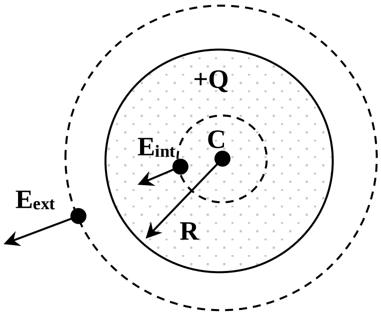


3. Soluzione.

Richiamo di teoria: Calcolo del campo elettrico e del potenziale di una sfera uniformemente carica

Applicando la legge di Gauss $\Phi(E_o) = 4\pi r^2 E_o = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$

si ottengono i campi elettrici interno ed esterno $\begin{cases} E_{int} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3} \\ E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2} \end{cases}$

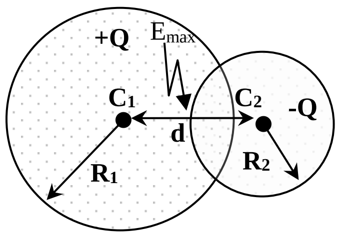


ed i relativi potenziali $\begin{cases} V_{int}(r) = \int_r^R E_{int}\,dr + V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3R^2 - r^2}{2R^3}\right) \\ V_{ext}(r) = \int_r^\infty E_{ext}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r} \end{cases}$

da cui il potenziale al centro vale $V_{int}(C) = \frac{3}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$. (queste formule valgono anche per -Q)

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

Il potenziale nel punto C_1 vale $V(C_1) = V_{int}^+(C_1) + V_{ext}^-(d) = \frac{3}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o d}$



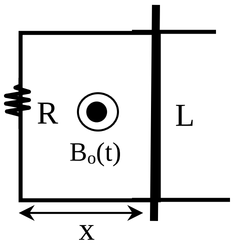
Il potenziale nel punto C_2 vale $V(C_2) = V_{ext}^+(d) + V_{int}^-(C_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o d} + \frac{3}{2}\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o R_2}$

La **differenza di potenziale** vale quindi $V(C_1) - V(C_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{2}\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} - \frac{2}{d}\right) =$ **1350 V**

Il campo elettrico è massimo nel punto P tale che $C_1P=d-R_2$

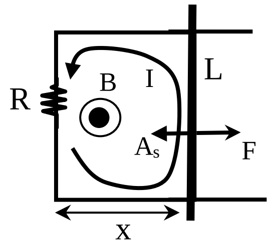
$\boldsymbol{E_{max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{d-R_2}{R_1^3} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R_2^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{d-R_2}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^2}\right)}$ **=58.4 kV/m**

4. Testo. Una barretta metallica di lunghezza L=10 cm e di massa m=15 g è libera di muoversi strisciando con attrito lungo una guida metallica giacente su un piano orizzontale in modo da formare un circuito elettrico planare di forma rettangolare di lati L ed x=7 cm. Tale circuito, di resistenza elettrica costante R=2 Ω, giace in una regione dove è applicato un vettore induzione magnetica uniforme diretto in verticale di intensità variabile nel tempo con legge armonica $B(t) = B_{max}cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ dove B_{max}=2 Wb/m^2 e periodo T=0.1 s, capace di generare una corrente indotta nel circuito ed una forza che tende a fare muovere la barretta. Determinare l'espressione temporale della forza magnetica subita dalla barretta ed il valore minimo richiesto per il coefficiente di attrito statico della barra tale da impedirne sempre il movimento. Assumendo invece che il coefficiente di attrito statico abbia un valore insufficiente pari a μ_s=0.15 determinare in quale istante la barretta inizia a muoversi.



4. Soluzione. La spira rettangolare è disposta sul piano orizzontale. Il verso di percorrenza della corrente è antiorario così che la normale alla spira sia diretta come il vettore induzione magnetica lungo la verticale nel verso uscente dal piano

$$\Phi_c = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int BdS = B(t)\cdot L\cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -L\left(\frac{dB}{dt}\cdot x + B\cdot\frac{dx}{dt}\right) = -L\frac{dB}{dt}\cdot x = -x\cdot L\frac{d}{dt}\left[B_{max}cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)x\cdot L\cdot B_{max}sen\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$ (poiché la barra è ferma)

la corrente indotta nel circuito $i(t) = \frac{f_i}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{x\cdot L\cdot B_{max}}{R}sen\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ (nel senso in figura)

e applicando la II formula di Laplace si determina la **forza elettromagnetica subita dalla barra**

$$F(t) = iLB = \left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{x\cdot(L\cdot B_{max})^2}{R}sen\left(2\pi\frac{t}{T}\right)cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = \left(\frac{\pi}{T}\right)\frac{x\cdot(L\cdot B_{max})^2}{R}sen\left(4\pi\frac{t}{T}\right)$$

Tale forza oscilla sinusoidalmente ed ha valore massimo $F_{max} = \left(\frac{\pi}{T}\right)\frac{x\cdot(L\cdot B_{max})^2}{R}$ = **0.044 N**

La forza di attrito statico deve controbilanciare tale forza magnetica durante il periodo delle oscillazioni e questo implica $A_s = F(t) = F_{max}sen\left(4\pi\frac{t}{T}\right) \leq A_{max} = \mu_s mg$ Eq.(1)

che è sempre soddisfatta purchè $A_{max} = \mu_s mg \geq F_{max} = \left(\frac{\pi}{T}\right)\frac{x\cdot(L\cdot B_{max})^2}{R}$

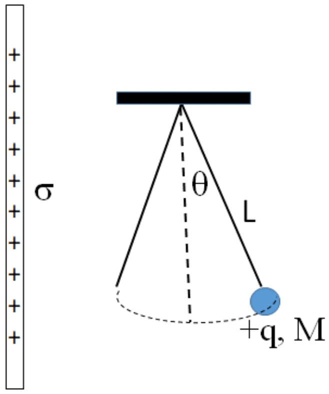
da cui si ricava il coefficiente di attrito statico minimo per la stabilità $\boldsymbol{\mu_s} \geq \left(\frac{\pi}{T}\right)\frac{x\cdot(L\cdot B_{max})^2}{m\cdot g\cdot R}$ = **0.3**

Nel caso invece in cui μ_s^{new}= **0.15,** dalla Eq.(1) si ricava che il primo distacco avviene quando $sen\left(4\pi\frac{t}{T}\right) > \frac{F_{max}}{\mu_s^{new}mg} = \frac{1}{2}$ quando l'argomento del seno è superiore all'angolo 30°=π/6

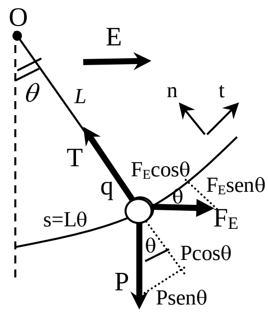
che permette di calcolare il tempo dal quale la barra si distacca $t > t_o = \frac{T}{24}$ = **4.17 ms**

Esercizi sostitutivi di elettromagnetismo previsti il II esonero

1. Testo. Un campo elettrico uniforme viene generato da uno strato piano carico con densità superficiale uniforme $+\sigma$. A lato dello strato piano una piccola sfera di massa M e di carica q viene sospesa con un filo di massa trascurabile di lunghezza L collegato al soffitto, comportandosi quindi come un pendolo semplice. Si determini l'angolo di equilibrio del pendolo rispetto alla verticale ed il periodo delle piccole oscillazioni. (σ=5nC/m^2; M=10g; L= 50cm; q=+10^{-5} C)



1. Soluzione. Il pendolo oscilla grazie alla distribuzione delle 3 forze applicate: la forza peso **P=Mg**, la tensione della fune **T**, la forza elettrica **F$_E$=qE** Scomponendo le forze sugli assi *n,t* si ottiene:



$$\begin{matrix} n) \\ t) \end{matrix}\begin{cases} T - P\cos\theta - F_E\, sen\,\theta = Mv^2/L \\ -P\, sen\,\theta + F_E \cos\theta = ML\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases} \quad (1)$$

dove la forza elettrica uniforme vale sempre $F_E = qE = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}$

Utilizzando l'espressione (1) lungo l'asse t si trova il **nuovo angolo di equilibrio** quando vale

$-P\, sen\,\theta_{eq} + F_E \cos\theta_{eq} = 0$ da cui $\boldsymbol{\theta_{eq}} = \arctan\left(\frac{F_E}{P}\right) = \arctan\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o Mg}\right)$ **=1.65° =1° 39'**

Inoltre sostituendo nella (1) le relazioni $P = \sqrt{P^2 + F_E^2}\cos\theta_{eq}$ e $F_E = \sqrt{P^2 + F_E^2}\sin\theta_{eq}$

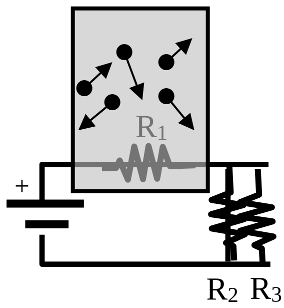
si ottiene $-\sqrt{P^2 + F_E^2}\left(\cos\theta_{eq}\, sen\,\theta - \cos\theta\, sen\,\theta_{eq}\right) = ML\frac{d^2\theta}{dt^2}$

che per le regole trigonometriche si semplifica in $-\sqrt{P^2 + F_E^2}\, sen\left(\theta - \theta_{eq}\right) = ML\frac{d^2\theta}{dt^2}$

inoltre introducendo l'angolo differenza $\theta' = \theta - \theta_{eq}$ l'equazione differenziale diviene sostanzialmente dello stesso tipo di un pendolo semplice $\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{\sqrt{P^2+F_E^2}}{ML} sen(\theta') = 0$

dove il periodo delle piccole oscillazioni si calcola $T = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega}} = 2\pi\sqrt{\frac{\boldsymbol{ML}}{\sqrt{(\boldsymbol{M}g)^2 + \left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}\right)^2}}}$ **= 1.42 s**

3. Testo. Un recipiente di volume V_o=2m^3 contiene n moli di He (gas monoatomico) alla temperatura uniforme di 40 °C e alla pressione atmosferica. Il recipiente è delicato e non può sostenere pressioni maggiori di 2 atmosfere. Il recipiente viene scaldato da una resistenza elettrica R_1=4Ω collegata ad un circuito con batteria di forza elettromotrice f=100V collegata (come indicato in figura) con un circuito elettrico azionato con un interruttore al tempo t=0. Dopo qualche tempo la temperatura e la pressione del gas aumentano. Determinare il numero delle moli di gas, ed il tempo al quale il recipiente si rompe e la temperatura nel gas in quell'istante. [c_v=3/2nR. La costante R_{gas}=8314 JK^{-1}kmol^{-1}, R_2 = R_3 =12Ω]



3. Soluzione. Il circuito elettrico può essere ricondotto ad un circuito semplificato formato da una sola maglia. Ciò si ottiene sostituendo alle resistenze R_2 ed R_3 la resistenza equivalente parallelo $R_p=R_2//R_3$ che vale $R_p = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3} = \mathbf{6\ \Omega}$

Nella maglia del circuito equivalente scorre la **intensità di corrente elettrica**

$I = \frac{f}{(R_2//R_3)+R_1} = \frac{f}{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}+R_1} = \frac{100V}{6\Omega+4\Omega} = \boldsymbol{10\ A}$ (corrente che attraversa R_1)

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulla resistenza R_1: $P_{R1} = I^2 R_1$ =**400 W**

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** ed utile per la trasformazione isobara del gas è quindi $Q = P_{R1} \cdot \tau = I^2 R_1 \tau$ (Eq.1)

Trasformazione Isocora del gas

Il calore assorbito dal gas permette di passare dallo stato termodinamico 1 (p_1=1atm=101300 Pa, T_1=40 °C=313.15 K) allo stato finale 2 (p_2=2atm=202600 Pa, T_2 è incognita).

Applicando la legge di Gay Lussac per le isocore $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$

è possibile calcolare la **temperatura finale** $T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = 2\,T_1 = \boldsymbol{626.30\ K = 355.15\ °C}$

cui corrisponde un **aumento di temperatura** $\Delta T = T_2 - T_1 = \boldsymbol{313.15\ K}$

E' utile determinare il **numero delle kmoli** dalla legge dei gas perfetti: $n = \frac{p_{atm} V_0}{R_{gas} T_1} = \boldsymbol{0.078\ kmoli}$

Il **calore Q** necessario per aumentare di ΔT la temperatura di n kmoli di gas monoatomico:

$Q = nC_v \Delta T = \frac{3}{2} n R_{gas} \Delta T = \frac{3}{2} p_{atm} V_0 \frac{\Delta T}{T_1}$ =**304 kJ**

che unita alla Eq.1 consente di trovare il **periodo di tempo** $\tau = \frac{Q}{P_{R1}} = \frac{nC_v \Delta T}{P_{R1}} = \frac{304kJ}{400W} = \mathbf{760\ s}$