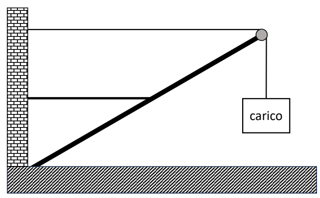
Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
12 giugno 2024 – prova scritta di Fisica 1

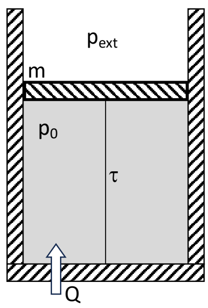
1) Un corpo si muove lungo una traiettoria circolare di raggio R=20 cm con velocità angolare ω_0=15 rad/s. All'istante t_0 = 0 s e per i successivi 16 s (fino al tempo t_1) il corpo decelera con accelerazione angolare α=-kt con k=0.1 s^{-3}; successivamente (t>t1) il valore della decelerazione resta costante al valore α_1 raggiunto al tempo t_1, finché non si ferma. Calcolare A) il modulo dell'accelerazione totale al tempo t_1 e B) quanto tempo dopo t_1 si ferma.

2) Un secchio di massa m_s=500g è attaccato ad un filo inestensibile di massa trascurabile arrotolato intorno ad una carrucola (di raggio R= 20 cm e massa m_c=2kg) che fa parte di un motore elettrico. Ad un certo istante il motore si rompe e la carrucola si sblocca, facendo scendere il secchio. La rotazione della carrucola, poiché attaccata al motore, sente un attrito di momento $M_{attrito}$=0,8 Nm. Calcolare la velocità del secchio quando sarà caduto per 3 m.

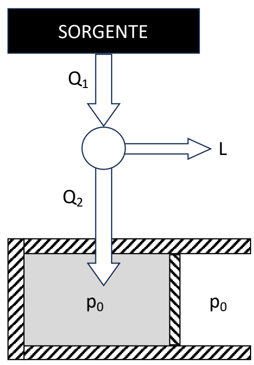
3) Una gru è costituita da un braccio rigido lungo L=5m e massa m_b=10kg sorretto da un tirante attaccato a metà della sua lunghezza e vincolato, dall'altra parte, al muro. Alla sommità del braccio è presente una carrucola sulla quale passa il cavo (inestensibile e di massa trascurabile) che solleva i pesi. Anche questo cavo è collegato al muro. La gru sta tenendo sospeso (e fermo) un carico di 200 kg: in questa condizione, sia il tirante che il cavo risultano orizzontali mentre il braccio è inclinato di 60° rispetto alla direzione verticale. Determinare le forze esercitate dal muro per tenere il tirante e il cavo e le componenti della reazione vincolare di appoggio del braccio al pavimento.



4) Un contenitore adiabatico verticale, contenente n=0,2 moli di gas perfetto monoatomico alla temperatura T_0=350K e pressione p_0=2 atm, è limitato superiormente da un setto adiabatico di massa m=10kg e sezione A=100 cm^2, libero di scorrere senza attrito. Il setto è tenuto fermo da un filo inestensibile e di massa trascurabile collegato alla base del contenitore. Al gas viene fornita lentamente la quantità di calore Q = 300 J necessaria ed esattamente sufficiente a far spezzare il filo. Sapendo che la pressione esterna è di 1 atm, calcolare la pressione interna del gas quando si spezza la corda e la sua tensione τ di rottura.



5) Una macchina termica di rendimento η=0,3 lavora assorbendo il calore Q_1 da una sorgente e cedendo il calore Q_2 ad un gas perfetto monoatomico. Il gas è contenuto in un cilindro limitato da un pistone (di massa trascurabile) in costante equilibrio con la pressione esterna (p_0=1atm), che si può muovere senza attrito. Sapendo che ad ogni ciclo della macchina il gas ha una variazione di volume ΔV=10litri, calcolare il calore Q_2, il lavoro in un ciclo e il calore Q_1.



Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

12 giugno 2024 – Soluzioni dello scritto di Fisica 1

1.1) Essendo un moto circolare accelerato, l'accelerazione totale sarà la somma vettoriale dell'accelerazione tangenziale e dell'accelerazione normale:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad \rightarrow \quad a_{tot} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \ .$$

Il modulo dell'accelerazione tangenziale si può calcolare dall'accelerazione angolare:

$$a_\tau = \alpha R = -kt\, R$$

Per il modulo dell'accelerazione normale dobbiamo conoscere il valore della velocità angolare:

$$a_n = -\omega^2 R$$

Conoscendo l'accelerazione angolare possiamo calcolare la velocità angolare:

$$\alpha(t) = -kt = \frac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t -kt'dt'$$

da cui:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{1}{2}kt^2$$

Pertanto:

$$a_{tot}(t_1) = R\sqrt{(-kt_1)^2 + \left(-\omega_0 + \frac{1}{2}kt_1^2\right)^4} = 1{,}02\,\frac{m}{s^2}$$

1.2) Per un tempo maggiore di t_1 la decelerazione angolare resta costante. Pertanto la legge oraria per la velocità angolare assume la forma:

$$\omega(t) = \omega_1 - \alpha_1 t$$

avendo azzerato il tempo a t_1. Nella formula:

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2}kt_1^2 \qquad e \qquad \alpha_1 = kt_1 \ .$$

Ponendo la condizione di arresto ω=0 si ricava il tempo t_2:

$$\omega(t_2) = 0 = \omega_1 - \alpha_1 t_2 \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{\omega_1}{\alpha_1} = 1{,}37\ s$$

2) Possiamo applicare un bilancio energetico. Inizialmente il sistema ha una energia potenziale gravitazionale del secchio: $U_{in} = m_s g h$

Durante la caduta il secchio acquista energia cinetica di traslazione mentre la carrucola acquista energia cinetica rotazionale:

$$T_{totale} = T_{secchio} + T_{disco} = \frac{1}{2}m_s v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove:

$$I = \frac{1}{2}m_c R^2 \ .$$

Tuttavia parte dell'energia iniziale sarà convertita in calore dall'attrito il cui lavoro vale:

$$L_{attrito} = -\int_0^{\theta_{max}} M_{attrito}\, d\theta = -M_{attrito}\int_0^{\theta_{max}} d\theta = -M_{attrito}\theta_{max}$$

dove θ_{max} è l'angolo di rotazione della carrucola per svolgere una lunghezza h di cavo:

$$\theta_{max} = \frac{h}{R} \ .$$

Pertanto il bilancio energetico vale:

$$m_s g h = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + M_{attrito} \frac{h}{R} \ .$$

Ponendo la condizione di rotolamento puro ($v = \omega R$) del cavo sulla carrucola si ottiene:

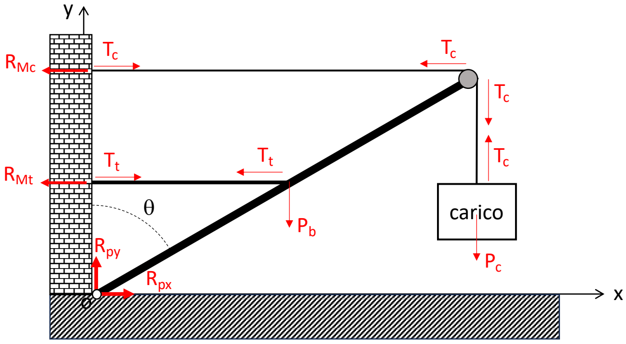
$$v = \sqrt{\frac{4h\left(m_s g - \frac{M_{attrito}}{R}\right)}{2m_s + m_c}} = 1{,}9\ m/s$$

3) Applicando il bilancio delle forze agenti sul carico possiamo determinare che la tensione del cavo è uguale al peso del carico:

$$P_c = T_c$$

Quindi la reazione del muro al cavo è uguale al peso del carico:

$$R_{Mc} = T_c = P_c = m_c g = 1962\ N$$



Per le altre reazioni applichiamo la prima e la seconda equazione cardinale della dinamica in regime statico:

$$\begin{cases} x: \quad R_{px} - T_t - T_c = 0 \\ y: \quad R_{py} - P_b - T_c = 0 \\ o: \quad T_t \frac{L}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - P_b \frac{L}{2} \sin(\theta) + T_c L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - T_c L \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Semplificando:

$$\begin{cases} R_{px} - T_t - P_c = 0 \\ R_{py} - P_b - P_c = 0 \\ T_t \frac{1}{2} \cos(\theta) - P_b \frac{1}{2} \sin(\theta) + P_c[\cos(\theta) - \sin(\theta)] = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$R_{py} = P_b + P_c = (m_b + m_c)g = 2060\ N$$

$$T_t = P_b \tan(\theta) - 2P_c \frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 4992\ \mathrm{N}$$

$$R_{px} = T_t + P_c = P_b \tan(\theta) - 2P_c[1 - \tan(\theta)] + P_c = g(m_b \tan(\theta) + m_c[2\tan(\theta) - 1]) = 5004\ N$$

4) il gas segue una trasformazione isocora. Il calore scambiato vale:

$$Q = nc_v(T_F - T_0)$$

da cui è possibile calcolare la temperatura finale:

$$T_F = \frac{Q}{nc_v} + T_0 \quad .$$

La pressione finale sarà:

$$p_F = \frac{nRT_F}{V} \ .$$

Non conosciamo il volume che può essere determinato dallo stato iniziale:

$$\frac{V}{nR} = \frac{T_0}{p_0}$$

da cui:

$$p_F = \frac{T_F}{T_0} p_0 = 2{,}69\ atm$$

Per calcolare il carico di rottura del filo, possiamo fare il bilancio delle forze che agiscono sul setto un attimo prima della rottura. In questo caso la pressione interna è equilibrata dalla resistenza del filo, dal peso del setto e dalla pressione esterna:

$$p_F A = p_{ext} A + mg + \tau$$

da cui:

$$\tau = (p_F - p_{ext})A - mg = 1610\ N$$

5) il gas nel pistone segue una trasformazione isobara, il cui calore vale:

$$Q_{isobara} = -Q_2 = nc_p \Delta T$$

Non conosciamo il numero di moli e la variazione di temperatura, che possono essere calcolate dalla funzione di stato dei gas perfetti:

$$p_0 V = nRT \quad \rightarrow \quad n\Delta T = \frac{p_0 \Delta V}{R}$$

da cui

$$Q_2 = -c_p \frac{p_0 \Delta V}{R} = -\frac{5}{2} p_0 \Delta V = -2533J$$

Conoscendo il rendimento possiamo calcolare il calore Q_1:

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad \rightarrow \quad Q_1 = \frac{Q_2}{\eta - 1} = 3619J$$

Il lavoro è determinato dalla somma dei calori:

$$L = Q_1 + Q_2 = 1086J$$

(il lavoro può anche essere calcolato dal rendimento: $L = \eta Q_1 = 1086J$*)*