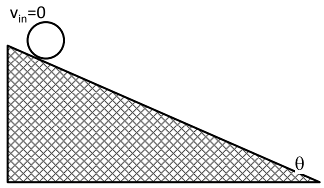
Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

10 febbraio 2020 – prova scritta di Fisica 1

1) Un pendolo semplice è costituito da una massa puntiforme M attaccata ad un filo di lunghezza L e massa trascurabile. L'estremo libero del filo è vincolato al soffitto di un ascensore (vincolo privo di attrito). Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni nei seguenti casi:

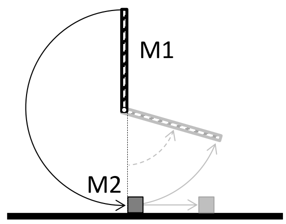
- **A)** ascensore fermo
- **B)** ascensore in salita con velocità costante v
- **C)** ascensore in salita con accelerazione costante a
- **D)** ascensore in caduta libera.

2) Un cilindro di massa M e raggio R si trova fermo su un piano inclinato scabro (angolo di inclinazione θ, coefficiente di attrito statico μ_s). Ad un certo istante viene lasciato libero di scendere di moto di rotolamento puro. Calcolare:



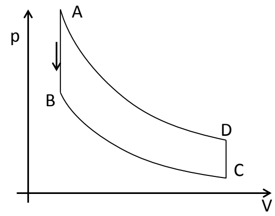
- **A)** l'attrito statico che si esercita tra cilindro e piano
- **B)** l'angolo θ per cui il moto non è più un rotolamento puro e il cilindro inizia anche a strisciare.

3) Una sbarretta lunga L e di massa M1 è vincolata a ruotare senza attrito intorno ad uno dei suoi estremi. Inizialmente si trova nella posizione di equilibrio verticale instabile; ad un certo istante inizia a scendere finchè, nella posizione verticale sottostante, urta elasticamente contro una massa M2 che inizierà a muoversi sul piano orizzontale privo di attrito. Determinare:



- **A)** la velocità dopo l'urto della massa M2
- **B)** a quale altezza arriverà il centro di massa della sbarretta dopo l'urto.

4) Una pompa di calore è costituita da un gas ideale biatomico che percorre un ciclo termodinamico costituito da due isoterme (alle temperature T_1=20°C e T_2=55°C) e due isocore ($V_D=2V_A$). Per mantenere dell'acqua alla temperatura T_2 assorbe una quantità di lavoro. Sapendo che il lavoro necessario per fare un giro completo del ciclo è W=−400J determinare:



- **A)** il numero di moli del gas ;
- **B)** il calore scambiato con la sorgente T_2 in un ciclo.

5) Un cilindro ad isolamento termico è diviso in due parti uguali da un setto anch'esso isolante: nella prima parte è contenuta una 1 mole di gas monoatomico alla pressione P1; nella seconda metà è contenuta 1 mole dello stesso gas alla pressione P2 (P2<P1). Ad un certo istante il setto è lasciato libero di scorrere senza attrito per effetto delle pressioni, fino al raggiungimento dell'equilibrio finale. Determinare:

- **A)** di quanto variano i volumi
- **B)** la pressione finale di equilibrio.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
15 gennaio 2020 – Soluzioni dello scritto di Fisica 1

1A) Con l'ascensore fermo il secondo principio della dinamica può essere scritto come:

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

che proiettata lungo la traiettoria circolare diventa:

$$m\frac{d^2 l\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} \cong -\frac{g}{l}\theta \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1B) Una salita a velocità costante non modifica le forze sentite (sistema inerziale) quindi il periodo di oscillazione rimane invariato

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1C) All'interno dell'ascensore che sale con accelerazione costante si sente una gravità aumentata (sistema non inerziale) pertanto il periodo risulterà diminuito cioè il moto del pendolo sarà più rapido:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

1D) In caduta libera sono accelerato verso il basso con g ma anche l'ascensore scende accelerato di g. Nel sistema dell'ascensore non ho accelerazione in quanto $a' = g - g = 0$

Quindi il periodo del pendolo verrebbe infinito:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0}} = \infty$$

Significa che il pendolo non oscilla....rimane fisso nella sua posizione iniziale.

2A) Prima e seconda equazione cardinale della dinamica (la seconda rispetto al centro del disco):

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{A} + \vec{R}$

$I\vec{\Omega} = \vec{M}_A$

dove il momento d'inerzia del cilindro rispetto al centro di massa vale:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Proiettando la prima lungo il piano inclinato e svolgendo la seconda per una rotazione oraria:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta - A \\ I\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = AR \end{cases}$$

Risolvendo il sistema introducendo la condizione di rotolamento puro

$a = R\dot{\omega}$

si ricava il valore dell'attrito:

$$A = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

2B) Quando l'angolo di inclinazione è tale da far esercitare l'attrito statico massimo si ha:

$$A = \mu_S mg\cos\theta = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

da cui si ricava l'angolo massimo:

$$\tan\theta = 3\,\mu_S$$

3A) Bilancio energetico della caduta della sbarretta:

$$m_1 gL = \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

Dove il momento d'inerzia vale:

$$I = \frac{1}{3}m_1 L^2$$

Da cui calcoliamo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6g}{L}}$$

Urto elastico: applico la conservazione del momento angolare e dell'energia

$$\begin{cases} I\omega_0 = I\omega_1 + m_2 v_2 L \\ \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Raggruppando i termini in ω si ottiene:

$$\begin{cases} I(\omega_0 - \omega_1) = m_2 v_2 L \\ I(\omega_0^2 - \omega_1^2) = I(\omega_0 - \omega_1)(\omega_0 + \omega_1) = m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Semplificando membro a membro le equazioni del sistema otteniamo:

$$\begin{cases} I(\omega_0 - \omega_1) = m_2 v_2 L \\ (\omega_0 + \omega_1)L = v_2 \end{cases}$$

Risolvendo si ricavano le due velocità post-urto:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2}\omega_0 = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2} \cdot \sqrt{\frac{6g}{L}} \\ \boldsymbol{v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_2} L\omega_0 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_2}\sqrt{6Lg}} \end{cases}$$

3B) per l'altezza finale della sbarretta applichiamo ancora il bilancio energetico:

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 = m_1 gh$$

sostituendo i valori si ottiene:

$$\frac{1}{6}m_1 L^2\left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2}\right)^2 \frac{6g}{L} = m_1 gh$$

da cui:

$$h = \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2}\right)^2 L$$

4A) Il lavoro risulta non nullo solo lungo le trasformazioni isoterme in quanto lungo le isocore la variazione di volume è nulla. Quindi

$$W = nRT_2 \ln\frac{V_A}{V_D} + nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_A}$$

da cui:

$$n = \frac{W}{R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_D}{V_A}} = 2\,moli$$

4B) Il calore scambiato con la sorgente alla temperatura T2 corrisponde a quello scambiato nella trasformazione isoterma DA (proprio alla temperatura T2) e quello scambiato nella trasformazione isocora CD. Pertanto:

$$Q_2 = Q_{DA} + Q_{CD} = nRT_2\ln\frac{V_A}{V_D} + nc_V(T_2 - T_1) = -3750J + 1443J = -2307\,J$$

Il calore risulta negativo perché è diretto verso la sorgente a temperatura maggiore.

5) Essendo il recipiente ad isolamento termico le trasformazioni sono adiabatiche. Possiamo scrivere per ognuna delle due parti:

$$p_1V^\gamma = p(V+\delta)^\gamma$$

$$p_2V^\gamma = p(V-\delta)^\gamma$$

dividendo membro a membro e facendone la radice γ-esima:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{V+\delta}{V-\delta}$$

esplicitando per δ si ottiene:

$$\delta = \frac{p_1^{\frac{1}{\gamma}} - p_2^{\frac{1}{\gamma}}}{p_1^{\frac{1}{\gamma}} + p_2^{\frac{1}{\gamma}}}V$$

La pressione finale di equilibrio p può essere calcolata ad esempio dalla politropica

$$p_1V^\gamma = p(V+\delta)^\gamma$$

sostituendo il valore δ:

$$p = \frac{\left(p_1^{\frac{1}{\gamma}} + p_2^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma}{2}$$