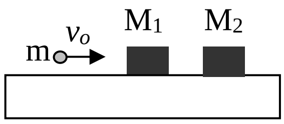
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni del I Appello del 20 Giugno 2024

1. Testo. Due blocchi di massa rispettivamente M_1=0.5 kg ed M_2=1 kg giacciono in quiete lungo un piano orizzontale privo di attrito. Un proiettile di massa m=25g dotato di energia cinetica iniziale K_o=10 J perfora entrambi i blocchi in rapida sequenza fuoriuscendone ogni volta con energia cinetica dimezzata. Determinare le velocità impresse ai due blocchi e l'energia persa dopo entrambi gli urti. Determinare se dopo la fuoriuscita del proiettile esistano le condizioni per un ulteriore urto fra i due blocchi. In questo caso, ipotizzando l'urto centrale ed elastico, determinare le velocità dei blocchi dopo l'urto.



1. Soluzione.

Il proiettile è dotato inizialmente di velocità $\boldsymbol{v_{oA}} = \sqrt{\frac{2K_0}{m}}$ **= 28.3 m/s** (si ottiene da $K_0 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v_{0A}^2}$)

il proiettile fuoriesce con energia cinetica dimezzata e con velocità $\boldsymbol{v_{oB}} = \sqrt{\frac{2(K_0/2)}{m}}$ **= 20 m/s**

infine fuoriesce anche dal secondo blocco con velocità finale $\boldsymbol{v_{oC}} = \sqrt{\frac{2(K_0/4)}{m}}$ **= 14.1 m/s**

Dalla conservazione della quantità di moto durante i due urti ricaviamo le velocità dei due blocchi

Blocco n. 1 $\quad mv_{oA} = mv_{oB} + M_1 v_1$ da cui $v_1 = \frac{m}{M_1}(v_{oA} - v_{oB}) =$ **0.41 m/s**

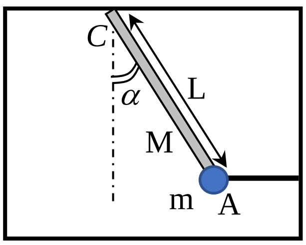
Blocco n. 2 $\quad mv_{oB} = mv_{oC} + M_2 v_2$ da cui $v_2 = \frac{m}{M_2}(v_{oB} - v_{oC}) =$ **0.146 m/s**

L'energia persa è $\boldsymbol{E = K_o - \left(\frac{K_o}{4} + \frac{1}{2}M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2\right)}$ **=7.45 J**

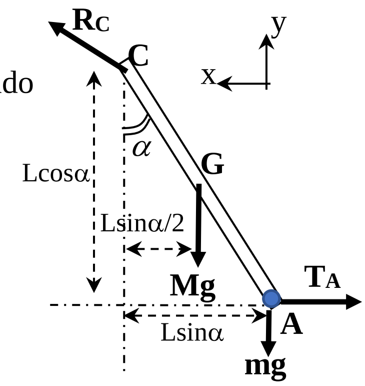
Facoltativo: il risultato dell'urto elastico fra i due blocchi fornisce velocità di uscita dopo l'urto

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right)v_1 + \left(\frac{2M_2}{M_1 + M_2}\right)v_2 = -\frac{v_1}{3} + \frac{4}{3}v_2 = \boldsymbol{0.057 m/s} \\ V_2 = \left(\frac{2M_1}{M_1 + M_2}\right)v_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}\right)v_2 = \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 = \boldsymbol{0.325 m/s} \end{cases}$$

2. Testo. Una barra di massa M=6 kg e di lunghezza L=30 cm è incardinata in C ad una parete verticale e collegata nell'estremo A ad una fune orizzontale. Nel punto A della barra è anche saldato un punto materiale di massa m=2 kg. Sapendo che la fune esercita una forza di sostegno T_A=8 N, determinare l'angolo di equilibrio rispetto alla verticale α. Determinare il periodo delle oscillazioni della barra supponendo che la fune orizzontale venga spezzata e calcolare la massima velocità raggiunta dalla massa m durante l'oscillazione supponendo che non vi siano attriti.



2. Soluzione. Analisi in condizioni statiche.



La barra sottoposta alle quattro forze **Mg, mg, T_A, R_c** è in equilibrio quando le due equazioni cardinali sono contemporaneamente nulle:

La prima Eq. cardinale proiettata lungo gli assi x,y produce

$$\begin{cases} R_{cx} = T_A \\ R_{cy} = Mg + mg \end{cases}$$

La seconda Eq. Cardinale calcolata rispetto all'asse per il cardine C

$$\cancel{M}_{Rc} + M_{TA} + M_{Mg} + M_{mg} = 0$$

da cui $+T_A(L\cos\alpha) - Mg\left(\frac{L\sin\alpha}{2}\right) - mg(L\sin\alpha) = 0$ (il segno + è per le rotazioni antiorarie)

da cui semplificando L e dividendo per cosα: $\left(\frac{M+2m}{2}\right) g\tan\alpha = T_A$

ossia **l'angolo di equilibrio** vale $\alpha = \arctan\left(\frac{2T_A}{(M+2m)g}\right)$ **=0.162 rad = 9° 16'**

Analisi in condizioni dinamiche.

In assenza della tensione T_A la barra prende ad oscillare. Il periodo delle piccole oscillazioni si ottiene ricalcolando la seconda Eq. equazione cardinale rispetto all'asse per il cardine C in condizioni dinamiche

$\cancel{M}_{Rc} + M_{Mg} + M_{mg} = I_C \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ da cui $-Mg\frac{L}{2}\sin\alpha - mgL\sin\alpha = I_C\frac{d^2\alpha}{dt^2}$

che porta all'eq. differenziale $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{(M+2m)gL}{2I_C}\right)\alpha = 0$

dove il momento di inerzia complessivo della barra e del punto materiale vale $I_C = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2$

Il **periodo di oscillazione** vale quindi $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{2I_C}{(M+2m)gL}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}\left(\frac{M+3m}{M+2m}\right)}}$ **=0.98 s**

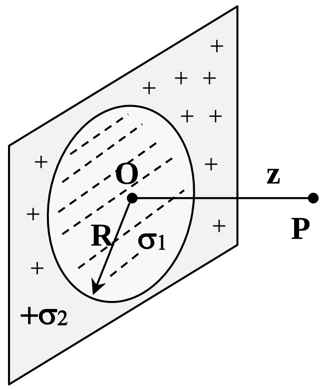
Inoltre la barra ruotando raggiunge la sua massima velocità angolare nella posizione verticale convertendo la sua energia potenziale iniziale nella posizione 1 in energia cinetica nella posizione verticale 2 secondo la relazione

$\boldsymbol{U_1 = K_2}$ ossia $Mg\frac{L}{2}(1-\cos\alpha) + mgL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}I_C\omega^2$

e la **velocità angolare massima** $\omega = \sqrt{\frac{(M+2m)gL(1-\cos\alpha)}{I_C}} = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\alpha)\left(\frac{M+2m}{M+3m}\right)}$ **=1.033 rad/s**

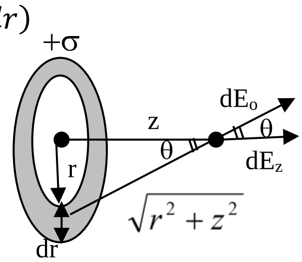
e la **velocità massima dell'estremo A:** $V_A = \omega L = \sqrt{3gL(1-\cos\alpha)\left(\frac{M+2m}{M+3m}\right)}$ **=0.31 m/s**

3. Testo. Un foglio isolante, piano, indefinito, è contraddistinto da due regioni caricate differentemente: la prima regione, interna ad un cerchio di raggio R=3cm centrato in O, è carica con densità superficiale uniforme negativa $-\sigma_1$= -100 μC/m^2; la seconda regione, esterna a tale cerchio, è carica con densità superficiale uniforme positiva $+\sigma_2$. Determinare il valore della densità nella seconda regione (σ_2) che rende nullo il campo elettrico nel punto P, posizionato lungo l'asse del cerchio, a distanza z=4 cm dal foglio. Infine ipotizzando che la densità superficiale abbia invece il valore prefissato σ_2=50μC/m^2 calcolare la nuova posizione assunta dal punto di equilibrio P.



3. Soluzione

La carica infinitesima presente in un singolo anello di raggio r, è $dq = \sigma(2\pi r dr)$



Tale carica produce un campo elettrico assiale in P

$dE_z = dE_o \cos\theta = \frac{dq \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o(r^2+z^2)}$ e quindi $dE_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{zrdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$.

Il campo elettrico complessivo si ottiene integrando sul foglio tutti i contributi.

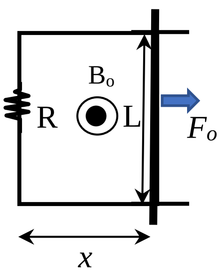
$$E_z = \int_0^R \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_o}\frac{zrdr}{(r^2+z^2)^{3/2}} + \int_R^\infty \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}\frac{zrdr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_o}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

L'annullamento del campo elettrico complessivo si ha quando: $-\sigma_1\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right)+\sigma_2 z = 0$

La **densità superficiale** vale $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{z}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right) = \sigma_1\left(\sqrt{1+(R/z)^2}-1\right)$ =**25 μC/m^2**

Nel caso in cui invece σ_2 =**50 μC/m^2** l'equilibrio si otterrebbe in $z = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_2+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^2-1}}$ =**2.7 cm**

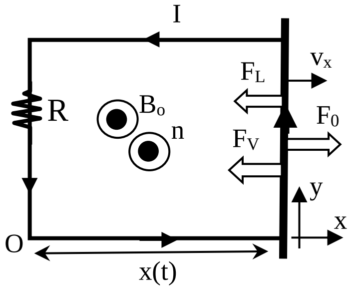
4. Testo. Una barretta metallica di massa m=10g è libera di spostarsi orizzontalmente lungo una guida metallica in modo da formare un circuito elettrico con R=2Ω di forma rettangolare di lati L ed x con x(t) variabile ed L=1m. Il circuito giace in una regione piana dove è applicato un vettore induzione magnetica uniforme (con verso uscente dal foglio) B_o=2T. Inizialmente la barra viene posizionata in x_o=25cm con velocità nulla. Ad essa viene poi applicata una forza esterna orizzontale di valore costante F_o=0.002 N in modo da muovere la barra verso destra. Il movimento viene anche contrastato da una resistenza viscosa del mezzo rispondente ad una legge lineare F_v=-bv ove b=0.01 kg/s. Determinare l'espressione della corrente elettrica e della velocità della barretta in funzione del tempo determinandone la velocità limite e confrontandola con la velocità limite cui tenderebbe in assenza di vettore induzione magnetica.



4. Soluzione

L'orientazione della corrente circolante nella spira (antioraria) è scelta in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia stessa direzione e verso di $\vec{B}$. Quindi il **flusso concatenato** con la spira Φ_c è

$$\Phi_c = \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dxdy = B_o \int_0^{x(t)} dx \int_0^L dy = B_o \cdot L \cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola

la **forza elettromotrice indotta** nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L v_x$

l'**intensità di corrente indotta** nel circuito $I = \frac{f_i}{R} = -\frac{B_o L}{R} v_x$

dove il segno meno indica che il verso effettivo della corrente è opposto a quello ipotizzato.

La **forza magnetica** agente sulla barra $\vec{F}_L = I \int d\vec{l} \times \vec{B}_o$ è contraria alla velocità $F_L = -\left(\frac{B_O^2 L^2}{R}\right) v_x$ nello stesso verso della **forza di resistenza del mezzo** $F_V = -b v_x$. In senso opposto è invece la forza costante F_o che è causa del movimento della barra verso destra.

Applicando il **2°principio** $F_L + F_V + F_0 = m a_x$ si ottiene $-\left(\frac{B_O^2 L^2}{R}\right) v_x - b v_x + F_0 = m \frac{dv_x}{dt}$

che può essere ordinato in forma canonica $\frac{dv_x}{dt} + \left(\frac{B_O^2 L^2}{mR} + \frac{b}{m}\right) v_x = \frac{F_0}{m}$

da cui la velocità v_x si ottiene sommando l'integrale generale e quello particolare

$$v_x(t) = A \cdot exp\left[-\left(\frac{B_O^2 L^2}{mR} + \frac{b}{m}\right) t\right] + \frac{F_0}{\frac{B_O^2 L^2}{R} + b}$$

Il coefficiente A si ottiene dalle condizioni iniziali imponendo $v_x(0)=0$ da cui $A = -\frac{F_0}{\frac{B_O^2 L^2}{R}+b}$

La **velocità della barra** assume quindi l'espressione $v_x(t) = \frac{F_0}{\frac{B_O^2 L^2}{R}+b}\left\{1 - exp\left[-\left(\frac{B_O^2 L^2}{mR} + \frac{b}{m}\right) t\right]\right\}$

che tende a regime ad una **velocità limite** $v_{lim} = \frac{F_0}{\frac{B_O^2 L^2}{R}+b}$ = **0.995 mm/s.**

In assenza di induzione magnetica (B_o=0) la velocità limite sarebbe stata molto più elevata

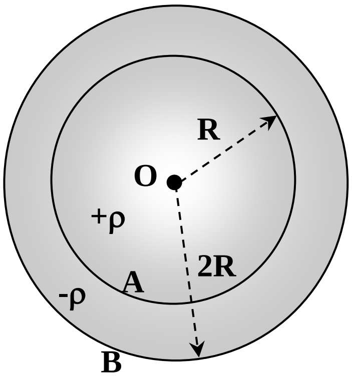
$v_{lim} = \frac{F_0}{b}$ = **0.2 m/s**.

La **corrente elettrica** nel circuito è $I(t) = -\frac{B_0 L}{R} v_x(t) = -\frac{B_0 L}{B_O^2 L^2 + bR} F_0 \left\{1 - exp\left[-\left(\frac{B_O^2 L^2}{mR} + \frac{b}{m}\right) t\right]\right\}$

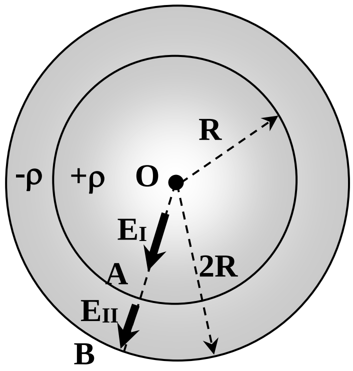
nel senso opposto a quello indicato in figura.

Esercizi sostitutivi di elettromagnetismo previsti il II esonero

2. Della carica è posizionata all'interno di due sfere concentriche di raggio R=10 cm e 2R=20 cm. La sfera più interna viene caricata uniformemente con densità volumetrica uniforme $+\rho = 10\mu C/m^3$, mentre il guscio esterno viene caricato con densità opposta. Determinare le differenze di potenziale fra il centro O ed il punto A della sfera interna, e fra il cento O ed il punto B della sfera esterna.



2. Soluzione. Calcolo del campo elettrico interno



Applicando la legge di Gauss ad una sfera passante per P con centro O si possono calcolare i campi elettrici nelle zone I e II

nella zona I; $\Phi_\Sigma(\vec{E}_I) = 4\pi r^2 E_I = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{\varepsilon_o}$ da cui $E_I = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}$

nella zona II; $\Phi_\Sigma(\vec{E}_{II}) = 4\pi r^2 E_{II} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho[4\pi R^3/3 - 4\pi(r^3 - R^3)/3]}{\varepsilon_o}$

da cui $E_{II} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{2R^3 - r^3}{r^2}\right)$

La differenza di potenziale tra i punti O ed A

$$V_O - V_A = \int_0^R E_I dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\int_0^R r dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_o} = \mathbf{1.885}\ \boldsymbol{kV}$$

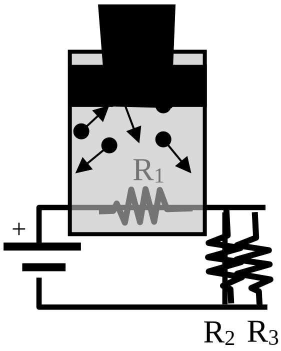
La differenza di potenziale tra i punti O ed B

$$V_O - V_B = \int_0^R E_I dr + \int_R^{2R} E_{II} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\int_0^R r dr + \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\int_R^{2R}\left(\frac{2R^3}{r^2} - r\right)dr =$$

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left\{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R + 2R^3\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{2R} - \left[\frac{r^2}{2}\right]_R^{2R}\right\} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left\{\frac{R^2}{2} + 2R^3\left[-\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right] - \frac{(2R)^2 - R^2}{2}\right\}$$

$= \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left\{\frac{R^2}{2} + R^2 - \frac{3R^2}{2}\right\} = \mathbf{0}$

3. Testo. Un recipiente di volume V_o=1m^3 contiene n moli di un gas biatomico alla temperatura uniforme di 30 °C e alla pressione atmosferica. Il recipiente ha un pistone mobile per poter effettuare trasformazioni termodinamiche del gas a pressione costante. Il recipiente viene scaldato da una resistenza elettrica R_1=2Ω collegata ad un circuito con batteria di forza elettromotrice f=50V collegata (come indicato in figura) con un circuito elettrico azionato con un interruttore al tempo t=0. Dopo qualche tempo il pistone si solleva ed il volume aumenta di un 5%. Determinare dopo quanto tempo ciò accade e trovare il valore della temperatura nel gas. [La costante R_{gas}=8314 JK^{-1}kmol^{-1}, R_2 = R_3 =6Ω]



3. Soluzione. Il circuito elettrico può essere ricondotto ad un circuito semplificato formato da una sola maglia. Ciò si ottiene sostituendo alle resistenze R_2 ed R_3 la resistenza equivalente parallelo $R_p=R_2//R_3$ che vale $R_p = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3} = \mathbf{3\ \Omega}$

Nella maglia del circuito equivalente scorre la **intensità di corrente elettrica**

$$I = \frac{f}{(R_2//R_3)+R_1} = \frac{f}{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}+R_1} = \frac{50V}{3\Omega+2\Omega} = \mathbf{10\ A} \quad \text{(corrente che attraversa } R_1\text{)}$$

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulla resistenza R_1: $P_{R1} = I^2 R_1$ =**200 W**

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** ed utile per la trasformazione isobara del gas è quindi $Q = P_{R1} \cdot \tau = I^2 R_1 \tau$ (Eq.1)

Trasformazione Isobara del gas

Il calore assorbito dal gas permette di passare dallo stato termodinamico 1 (V_1=1m^3, T_1=30 °C=303.15 K) allo stato finale 2 (V_2=1.05 m^3, T_2 è incognita).

Applicando la prima legge di Gay Lussac per le isobare $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

è possibile calcolare la **temperatura finale** $T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 1.05\ T_1 = \mathbf{318.31\ K = 45.16\ °C}$

cui corrisponde un **aumento di temperatura** $\Delta T = T_2 - T_1 = \mathbf{15.16\ K}$

E' utile determinare il **numero delle kmoli** dalla legge dei gas perfetti: $n = \frac{p_{atm} V_1}{R_{gas} T_1} = \mathbf{0.04\ kmoli}$

Il **calore Q** necessario per aumentare di ΔT la temperatura di n kmoli di gas biatomico:

$$Q = nC_p \Delta T = \frac{7}{2} n R_{gas} \Delta T = \frac{7}{2} p_{atm} V_1 \frac{\Delta T}{T_1} = \mathbf{17.7\ kJ}$$

che unita alla Eq.1 consente di trovare il **periodo di tempo** $\tau = \frac{Q}{P_{R1}} = \frac{nC_p \Delta T}{P_{R1}} = \frac{17.7 kJ}{200 W} = \mathbf{88.6\ s}$