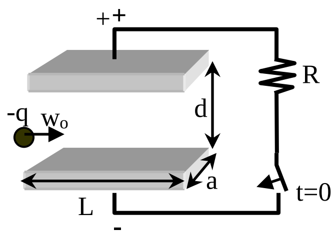
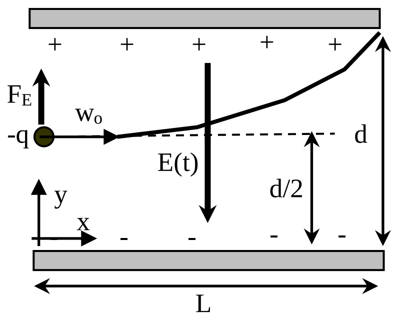
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale – Gruppi **C** e **D**
2° esonero del 19 Giugno 2020

1. Un condensatore piano è costituito da due armature rettangolari identiche di spigoli *a, L*, poste alla distanza *d*. Le due armature sono inizialmente tenute alla d.d.p. ΔV. Il processo di scarica avviene per t>0 dopo la chiusura dell'interruttore del circuito RC descritto in figura. Nell'istante di chiusura del circuito (t=0) una carica negativa –q di massa m entra a metà fra le armature del condensatore alla velocità w_o lungo la direzione parallela al lato L (vedi figura). Determinare le equazioni dei moti componenti e determinare il massimo valore della d.d.p. iniziale



ammissibile ΔV_{max} per il quale l'elettrone riesce ancora a transitare senza urtare le armature. Determinare anche la componente verticale della velocità di uscita (*trascurare gli effetti di bordo del condensatore*) [**Dati:** $w_o=10^3$ m/s, R=50kΩ, d=1mm, L=2m, a=2m, q=1 μC, m=1g]

1. Soluzione. La carica -q che attraversa una regione di spazio dove c'è un campo elettrico uniforme subisce una forza elettrica verso l'alto (+y)



$\vec{F}_E = -q\vec{E}(t) = m\vec{a}$ dove il campo elettrico $E(t) = \frac{\Delta V_o}{d}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

dove la capacità è $C = \varepsilon_o \frac{aL}{d} =$ **35.4 nF**,

ed il tempo di scarica vale $\tau = RC =$ **1.77 ms**

Equazioni della cinematica: partendo dal 2 principio $\vec{a} = -\left(\frac{q}{m}\right)\vec{E}(t)$, proiettando lungo gli assi, ed integrando una volta per ottenere le componenti della velocità $\vec{w}$, ed una seconda volta per ottenere i moti componenti si ottiene

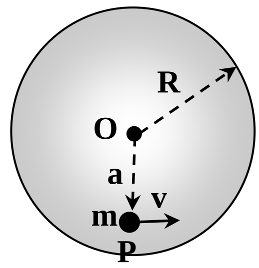
lungo l'asse x $\begin{cases} x = w_o t \\ w_x = w_o \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y = \frac{d}{2} + \frac{q}{m}\frac{\Delta V_o}{d}\tau\left[t - \tau\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\right] \\ w_y = +\frac{q}{m}\frac{\Delta V_o}{d}\tau\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \\ a_y = +\frac{q}{m}E(t) = \frac{q}{m}\frac{\Delta V_o}{d}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{cases}$

l'elettrone esce dal consensatore al tempo t* dopo aver percorso longitudinalmente (lungo l'asse x) l'intera lunghezza L, quindi dopo un tempo di transito $t^*=L/w_o=$ **2 ms**
La condizione di **massima d.d.p. iniziale** si ottiene imponendo che al tempo di transito l'elettrone urti con il bordo della armatura superiore y(t*)=d

da cui $\Delta V_{max} = \frac{m \cdot d^2}{2q\tau\{t^* - \tau[1-\exp(-t^*/\tau)]\}} =$ **352 V**

Con questa d.d.p. iniziale si ha $\mathbf{w_y=0.422}$ **m/s** e $w = \sqrt{w_o^2 + w_y^2} \approx$ **1000 m/s**

2. All'interno di una sfera di centro in O e di raggio R=10cm è distribuita una carica Q=300μC con densità volumetrica non uniforme di legge $\rho(r) = kr$ (r è la distanza di un punto generico dal centro O). Una carica puntiforme negativa di carica q= -2μC, di massa m=5g viene lanciata dal punto P (OP=a=8cm) alla velocità v in modo da poter descrivere un orbita circolare intorno al centro O. Calcolare la velocità orbitale v.

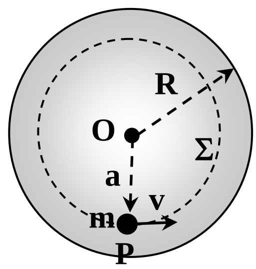


2. Soluzione. Calcolo preliminare della costante k

Integrando la densità di carica nella sfera $Q = \int_{sfera} \rho d\tau = \int_0^R (kr)(4\pi r^2 dr) = k\pi R^4 \Rightarrow k = \dfrac{Q}{\pi R^4}$

Calcolo del campo elettrico interno alla sfera

Applicando la legge di Gauss ad una sfera passante per P con centro O



$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_o) = 4\pi a^2 E_o(a) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \frac{\int \rho d\tau}{\varepsilon_o} = \frac{\int_o^a kr(4\pi r^2 dr)}{\varepsilon} = \frac{\pi k a^4}{\varepsilon_o}$$

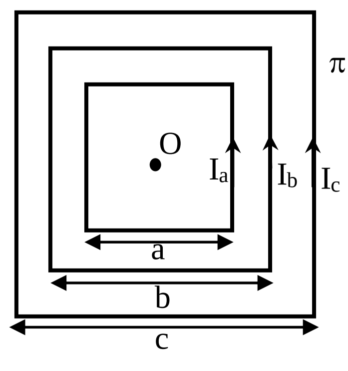
da cui $E_o(a) = \dfrac{ka^2}{4\varepsilon_o} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{a^2}{R^4}$

Calcolo della velocità orbitale

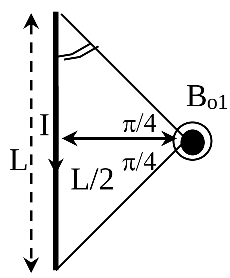
la forza di attrazione elettrica produce una accelerazione normale $a_n=v^2/a$ costante in modulo che spiega la traiettoria circolare ed il moto orbitale della carica

$F_e = qE_o = ma_n$ quindi $\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{a^2}{R^4} = m\dfrac{v^2}{a}$ da cui $v = \sqrt{\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m}\dfrac{a^3}{R^4}} =$ **74.4 m/s**

3. Tre spire quadrate concentriche si trovano su di uno stesso piano π. Sapendo che la più piccola, di lato a=1cm, e la più grande, di lato c=4cm, sono attraversate da due correnti elettriche dirette in senso antiorario di intensità rispettivamente I_a=1mA e I_c=4mA, determinare il valore e la direzione della corrente che deve scorrere nella terza spira intermedia di lato b=2cm affinché il campo magnetico complessivo si annulli al centro delle spire O.



3. Soluzione. Una generica spira quadrata è formata da 4 tratti rettilinei di lato L percorsi dalla stessa corrente I. Ciascun lato genera nel centro della spira un contributo di vettore induzione magnetica uscente dal piano del foglio di valore



$$B_{01} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{sen(\pi/4) + sen(\pi/4)}{L/2} = \sqrt{2}\frac{\mu_o I}{2\pi L}.$$

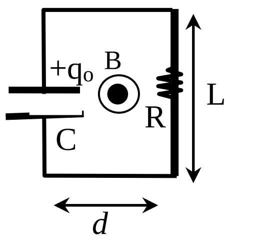
Sommando gli analoghi contributi degli altri tre lati si ottiene $B_{spira} = 4B_{01} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{\mu_o I}{L}$

Il campo complessivo generato dalle tre spire sarà quindi

$$B_{tot} = B_a + B_b + B_c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\mu_o\left(\frac{I_a}{a}+\frac{I_b}{b}+\frac{I_c}{c}\right)$$ che si annulla quando $I_b = -b\left(\frac{I_a}{a}+\frac{I_b}{b}\right) =$ **-4 mA**

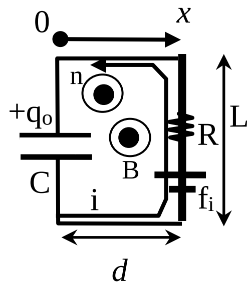
(la corrente richiesta I_b deve quindi scorrere in senso orario)

4. Un circuito elettrico rettangolare di larghezza d=8cm e di altezza L=10cm è chiuso nell'istante t=0 su una resistenza R=5Ω, ed un condensatore di capacità C=100μF con carica iniziale q_o=50μC. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione $B(t)=B_o(1-mt)$ con $m=10^3 s^{-1}$. Determinare il valore dell'induzione magnetica iniziale affinché la carica sul condensatore rimanga invariata. Calcolare l'espressione della corrente iniziale del circuito. Calcolare la carica che viene immagazzinata in regime stazionario sul condensatore.



4. Soluzione. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}$,

si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:



$$\Phi_c = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int BdS = B\int_0^d dx\int_0^L dy = B_o(1-mt)\cdot L\cdot d$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = B_o\cdot L\cdot m\cdot d$$ (la corrente tende quindi a circolare nel senso in figura)

Oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente un condensatore con una carica iniziale q_o.

L'equazione della maglia diviene quindi

$$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = f_i = B_oL\cdot m\cdot d$$ con soluzione $q(t) = B_oL\cdot m\cdot d\cdot C + A\exp(-t/RC)$

dove imponendo $q(t)=q_o$ in t=0 si ottiene $q(t) = B_oL\cdot m\cdot d\cdot C + (q_o - B_oL\cdot m\cdot d\cdot C)\exp(-t/RC)$

La carica rimane costante quando l'induzione magnetica vale: $B_o = \frac{q_o}{L\cdot m\cdot d\cdot C} =$ **0.063 T**

L'espressione della **corrente nel circuito** è quindi $i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_o}{RC} - \frac{B_oLmd}{R}\right)\exp(-t/RC)$

dove la corrente iniziale vale $i_o = -\frac{q_o - B_oLmdC}{RC} =$ **0 A** (nel caso in esame di B_o=0.063 T)

e l'espressione della **carica finale** immagazzinata permanentemente sarà quindi

$q(\infty) = B_oL\cdot m\cdot d\cdot C =$ q_o = **50 μC** (nel caso in esame di B_o=0.063 T la carica rimane invariata)

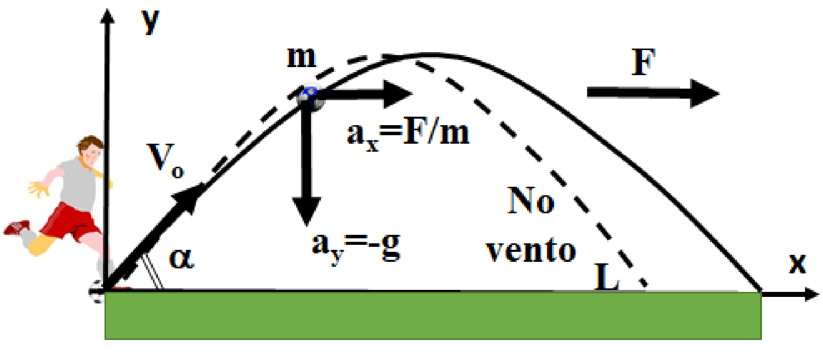
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA

A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale – Gruppi **C** e **D**
Esame completo 1°appello del 19 Giugno 2020

1. Un ragazzo lancia una palla di massa **m** con una velocità iniziale $\mathbf{v_o}$ con un angolo di elevazione α rispetto all'orizzontale. Nel momento del lancio una folata di vento imprime alla palla una forza orizzontale costante inizialmente nella direzione del moto (asse x) con una intensità uniforme nello spazio ma variabile nel tempo con legge $\mathbf{F(t)=F_{max}(1-t/T)}$ (*diviene negativa per t>T*). Si determini il tempo di volo ed il valore della gittata. Si calcoli anche la variazione della gittata dovuta alla folata rispetto al caso senza vento. Determinare infine quale valore avrebbe dovuto avere il parametro T nella formula in modo da non avere variazioni di gittata fra i casi con vento e senza [**Dati:** F_{max}=0.3N, T=5s, α=30°, m=150 g, v_o=10 m/s]

1. Soluzione.
Equazioni della cinematica scomposte lungo gli assi coordinati
(Il termine corrispondente alla folata con forza massima F_{max} è stato inserito solo lungo l'asse x)

Lungo x) $\begin{cases} x(t) = v_o\cos(\alpha)\cdot t + \dfrac{F_{max}}{m}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6T}\right) \\ v_x(t) = v_o\cos(\alpha) + \dfrac{F_{max}}{m}\left(t - \dfrac{t^2}{2T}\right) \\ a_x = \dfrac{F_{max}}{m}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) \end{cases}$ e lungo y) $\begin{cases} y(t) = v_o\sin(\alpha)\cdot t - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_o\sin(\alpha) - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$



Il **tempo di volo** si ottiene annullando y(t*)=0 da cui $t = 2v_o\sin(\alpha)/g =$ **1.02 s**

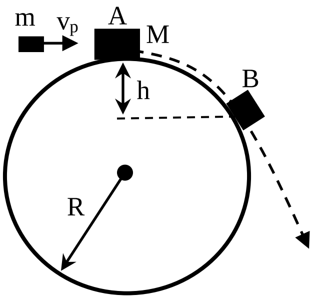
La gittata vale **x(t*)=9.86 m** a fronte di una gittata $L = \dfrac{2v_0^2 sen\alpha\cos\alpha}{g}$ =**8.84 m**

in assenza della forza F_{max}

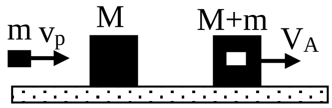
La variazione di gittata fra i due casi è quindi **Δx=x(t*)-L=**$\dfrac{F_{max}}{m}\left(\dfrac{t^{*2}}{2} - \dfrac{t^{*3}}{6T}\right)$=**1.02 m**

La variazione di gittata sarebbe nulla se il parametro assumesse il valore $T = t^*/3 =$ **0.34 s**

2. Un proiettile di massa m=20g con velocità orizzontale v_p=50m/s si conficca dentro un blocco di massa M=500g collocato sulla sommità di un tubo cilindrico liscio di raggio R=2m fermo nel punto A in equilibrio instabile. A seguito dell'urto perfettamente anelastico il blocco prende a scivolare sul tubo. Determinare la posizione del punto B nel quale il blocco si distacca dal cilindro fornendo la velocità del blocco al distacco e la differenza di quota h fra i punti A e B.



2. Soluzione. CALCOLO DELLA VELOCITA' DOPO L'URTO

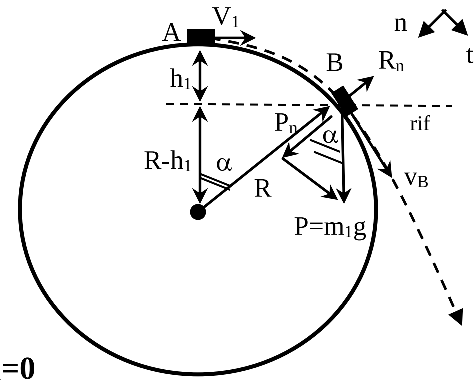


Si applica la conservazione della quantità di moto $mv_p = (m+M)V_A$

da cui la velocità del blocco dopo l'urto $V_A = \dfrac{m}{m+M} v_p =$ **1.92 m/s**

MOTO LUNGO LA GUIDA CILINDRICA DEL PRIMO BLOCCO

In assenza di attriti, durante il moto di scivolamento sulla guida, l'energia meccanica del primo blocco rimane costante. In particolare imponendo la conservazione dell'energia meccanica nel punto iniziale A e in quello di distacco B



$E_{mA} = E_{mB}$ da cui $K_A + U_A = K_B + U_B$

e cioè $\frac{1}{2}(M+m)V_A^2 + (M+m)gh = \frac{1}{2}(M+m)V_B^2$

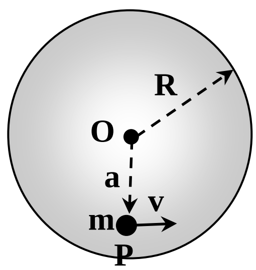
Le **forze agenti** quando il blocco si trova in B sono:

$$\begin{cases} \hat{n} & P_n - R_n = (M+m)a_n = (M+m)V_B^2/R \\ \hat{t} & P_t = (M+m)a_t \end{cases}$$ dove al distacco però $\mathbf{R_n=0}$

per cui deve valere la condizione $\dfrac{(M+m)v_B^2}{R} = P_n = (M+m)g\cos\alpha = (M+m)g\,\dfrac{R-h}{R}$

o equivalentemente $V_B = \sqrt{g(R-h)}$ che combinata con l'equazione energetica dà luogo alla soluzione del **dislivello** $h = \dfrac{R}{3} - \dfrac{V_A^2}{3g} =$ **54.1 cm** e la **velocità** $V_B = \sqrt{\dfrac{V_A^2 + 2gR}{3}}$ **=3.78 m/s**

3. All'interno di una sfera di centro in O e di raggio R=10cm è distribuita una carica Q=300μC con densità volumetrica non uniforme di legge $\rho(r) = kr$ (r è la distanza di un punto generico dal centro O). Una carica puntiforme negativa di carica q= -2μC, di massa m=5g viene lanciata dal punto P (OP=a=8cm) alla velocità v in modo da poter descrivere un orbita circolare intorno al centro O. Calcolare la velocità orbitale v.

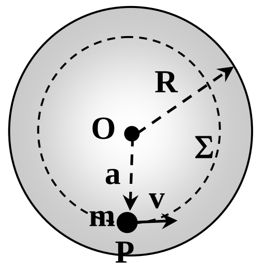


3. Soluzione. Calcolo preliminare della costante k

Integrando la densità di carica nella sfera $Q = \int\limits_{sfera} \rho d\tau = \int\limits_0^R (kr)(4\pi r^2 dr) = k\pi R^4 \Rightarrow k = \dfrac{Q}{\pi R^4}$

Calcolo del campo elettrico interno alla sfera

Applicando la legge di Gauss ad una sfera passante per P con centro O



$$\Phi_\Sigma\left(\vec{E}_o\right) = 4\pi a^2 E_o(a) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \frac{\int \rho d\tau}{\varepsilon_o} = \frac{\int\limits_o^a kr\left(4\pi r^2 dr\right)}{\varepsilon} = \frac{\pi k a^4}{\varepsilon_o}$$

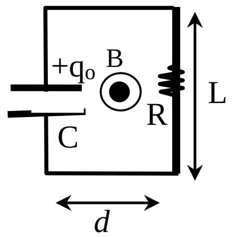
da cui $E_o(a) = \dfrac{ka^2}{4\varepsilon_o} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{a^2}{R^4}$

Calcolo della velocità orbitale

la forza di attrazione elettrica produce una accelerazione normale $a_n = v^2/a$ costante in modulo che spiega la traiettoria circolare ed il moto orbitale della carica

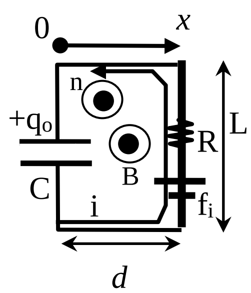
$$F_e = qE_o = ma_n \quad \text{quindi} \quad \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^2}{R^4} = m\frac{v^2}{a} \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m}\frac{a^3}{R^4}} = \mathbf{74.4\ m/s}$$

4. Un circuito elettrico rettangolare di larghezza d=8cm e di altezza L=10cm è chiuso nell'istante t=0 su una resistenza $R=5\Omega$, ed un condensatore di capacità $C=100\mu F$ con carica iniziale $q_o=50\mu C$. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione $B(t)=B_o(1-mt)$ con $m=10^3 s^{-1}$. Determinare il valore dell'induzione magnetica iniziale affinché la carica sul condensatore rimanga invariata. Calcolare l'espressione della corrente iniziale del circuito. Calcolare la carica che viene immagazzinata in regime stazionario sul condensatore.



4. Soluzione. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}$,

si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:



$$\Phi_c = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int BdS = B\int\limits_0^d dx \int\limits_0^L dy = B_o(1-mt)\cdot L\cdot d$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$f_i = -\dfrac{d\Phi_c}{dt} = B_o \cdot L \cdot m \cdot d$ (la corrente tende quindi a circolare nel senso in figura)

Oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente un condensatore con una carica iniziale q_o. L'equazione della maglia diviene quindi

$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = f_i = B_o L \cdot m \cdot d$ con soluzione $q(t) = B_o L \cdot m \cdot d \cdot C + A\exp(-t/RC)$

dove imponendo q(t)=q_o in t=0 si ottiene $q(t) = B_o L \cdot m \cdot d \cdot C + (q_o - B_o L \cdot m \cdot d \cdot C)\exp(-t/RC)$

La carica rimane costante quando l'induzione magnetica vale: $B_o = \frac{q_o}{L \cdot m \cdot d \cdot C}$ = **0.063 T**

L'espressione della **corrente nel circuito** è quindi $i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_o}{RC} - \frac{B_o Lmd}{R}\right)\exp(-t/RC)$

dove la corrente iniziale vale $i_o = -\frac{q_o - B_o LmdC}{RC}$ =**0 A** (nel caso in esame di B_o=0.063 T)

e l'espressione della **carica finale** immagazzinata permanentemente sarà quindi

$q(\infty) = B_o L \cdot m \cdot d \cdot C =$ q_o = **50 μC** (nel caso in esame di B_o=0.063 T la carica rimane invariata)