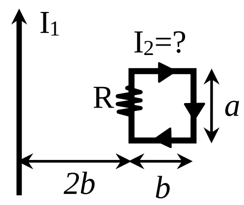
FISICA

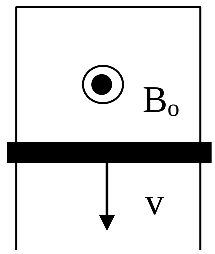
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale
19°prova

1. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1=I_o[1-\exp(-t/\tau)]$. Una spira rettangolare di lati *a,b* giace con il filo nel piano del foglio. Assumendo nota la resistenza elettrica R della spira, determinare l'espressione della corrente indotta nella spira e fornirne il valore iniziale al tempo t=0. Si trascurino i fenomeni di autoinduzione. [Dati: τ=10ms, I_o=2mA, a=1cm, R=20Ω]

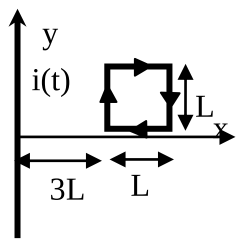


2. Una spira rigida quadrata di lato *a* e di resistenza elettrica *R* si muove nel vuoto su di un piano contenente un lungo filo rettilineo percorso dalla corrente I, con velocità costante v, mantenendo uno dei suoi lati parallelo al filo stesso. Ricavare in funzione della distanza L(t) l'espressione della forza esterna che occorre applicare alla spira per mantenere costante la velocità di traslazione.

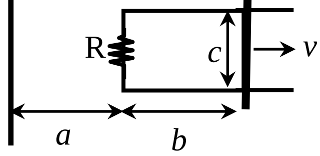
3. Una barretta cilindrica di rame di resistenza R, di lunghezza L e di massa m può scorrere mediante contatti striscianti su due guide metalliche verticali connesse elettricamente fra di loro (come in figura). Calcolare la velocità limite di caduta quando la barretta è lasciata cadere per gravità in un campo magnetico orizzontale uniforme B_o.



4. Una spira quadrata di lato *L* giace ad una distanza *d=3L* da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente sinusoidale $i(t)=i_{max}\cos(\omega t)$. Nota la resistenza elettrica *R* della spira, calcolare l'intensità della corrente massima indotta. Si trascuri l'autoinduzione presente nella spira [Dati: $L = 10$ cm, i_{max}= 2mA, ω=314rad/s, $R=1\Omega$]



5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1(t)=I_o(1-t/\tau)$ nell'intervallo di tempo $[0,\tau]$. Una spira rettangolare di lati *b,c* giace con il filo nel piano del foglio come indicato in figura ad una distanza minima *a* dal filo. La spira è inoltre costituita da 3 lati fissi ed un lato mobile inizialmente disposto alla distanza *a+b* dal filo e dotato della velocità v=3m/s. Assumendo R=2Ω la resistenza elettrica della spira, determinare l'espressione della forza elettromotrice indotta, della corrente indotta e della forza agente sul lato mobile della spira al tempo t=0.[**Dati:**τ=400ms, I_o=10A, a=1m, b=2m, c=4m]



FISICA

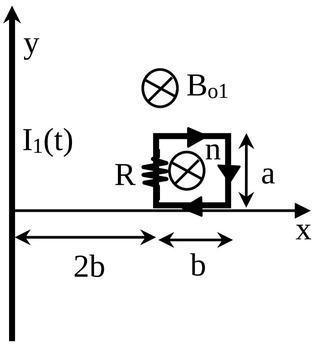
A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 19[a] prova

1. Il campo magnetico nonuniforme generato dal primo filo è $B_{o1}(x,t) = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$ Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata (la normale alla spira $\hat{n}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}_{o1}$) si ricava il flusso concatenato:

$$\Phi_{c,1} = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_o^a dy \int_{2b}^{3b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) a}{2\pi} \ln(3/2).$$



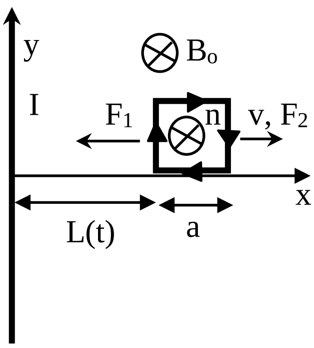
la **forza elettromotrice indotta nella spira**

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o a I_o}{2\pi\tau} \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) \right] \exp(-t/\tau)$$

e **la corrente indotta**

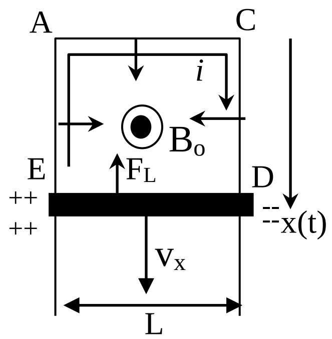
$$I_3(t) = \frac{f_i}{R} = -\frac{\mu_o a I_o \ln 3/2}{2\pi R\tau} \exp(-t/\tau)$$ che in t=0 vale $I_3(0) = -\frac{\mu_o a I_o \ln 3/2}{2\pi R\tau} =$ **-8.1 pA**

2. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x) = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_O$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_C:

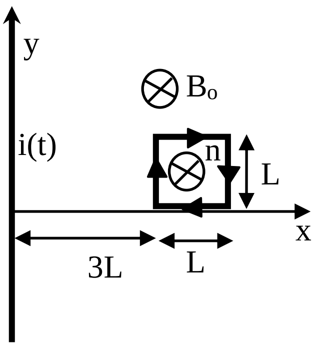


$\Phi_c(t) = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_o^L dy \int_L^{L+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{L(t)}\right)$. Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz possiamo calcolare la corrente indotta nella spira $i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{\mu_o I a^2}{2\pi R} \frac{v}{L(L+a)}$. Infine applicando la 2 formula di Laplace si ottengono le forze $F_1 = aiB_{o1} = \frac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R} \frac{v}{L^2(L+a)}$ e $F_2 = aiB_{o2} = \frac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R} \frac{v}{L\,(L+a)^2}$. La risultante è quindi attrattiva $F_1 - F_2 = \frac{\mu_o^2 I^2 a^4}{(2\pi)^2 R} \frac{v}{L^2(L+a)^2}$ e tende a rallentare il movimento della spira. Per mantenere la spira a velocità uniforme è quindi necessario applicare una forza esterna uguale e contraria alla risultante.

3. Il flusso concatenato con il circuito ABCD è $\Phi(t) = B_o \cdot L \cdot x(t)$ dove x(t) è la posizione mobile della barretta. Il movimento della barretta *DE* cioè causa una variazione di flusso di B_o nel circuito *ACDE* generando una forza elettromotrice indotta $f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o L v_x$ (legge di Faraday-Neumann-Lenz) dove il segno negativo indica che la corrente circola nel verso orario ossia nel vero opposto a quello considerato positivo rispetto a B_o (regola mano destra). L'intensità di questa corrente indotta è $i = f_i / R = B_o l v_x / R$. In accordo alla seconda formula di Laplace, sui 4 lati del circuito si generano forze attrattive. In particolare sull'unico lato mobile *DE* si genera una forza frenante $F_L = ilB_o = B_o^2 L^2 v_x / R$ proporzionale alla velocità di caduta, contraria al moto (asse *x*) ed alla forza peso *P=mg*. Applicando il II principio lungo l'asse di caduta *x*, si ottiene $ma_x = mg - F_L$ che è una equazione differenziale del primo ordine poiché $a_x = dv_x/dt$. Assumendo nulla la velocità iniziale l'espressione della velocità diverrà $v_x(t) = v_{\lim}(1 - \exp(-t/\tau))$ dove la velocità di caduta cresce fino a raggiungere $v_{\lim} = mgR/(B_o^2 L^2)$.



4. Il campo magnetico non uniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:



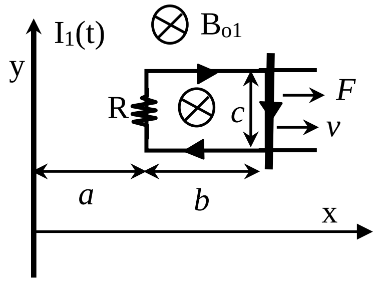
$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi} \int_o^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi} \ln(4/3)$. Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{d}{dt} i(t) = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) sin(\omega t)$. Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i / R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo

$i_{2,\max} = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi R} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{2\pi \cdot 1}$ 0.288 = **3.61 nA.**

5. Il campo magnetico non uniforme generato dal primo filo è $B_{o1}(x,t) = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$.

Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata (la normale alla spira $\hat{n}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}_{o1}$) si ricava il flusso concatenato:

$\Phi_c = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_o^c dy \int_a^{a+b(t)} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) c}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right)$.



la **forza elettromotrice indotta nella spira**

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o c}{2\pi}\left[\frac{dI_1}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right)+I_1\frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right)\right] = \frac{\mu_o c}{2\pi}\left[\frac{I_0}{\tau}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right)-I_o\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{v}{a+b(t)}\right]$$

che al tempo t=0 vale $f_{io} = \frac{\mu_o I_o c}{2\pi}\left[\frac{1}{\tau}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)-\frac{v}{a+b}\right] = \mathbf{14.0\ \mu V}$

la corrente indotta al tempo t=0 $I_{2o} = \frac{f_{i0}}{R} = \mathbf{7.0\ \mu A}$