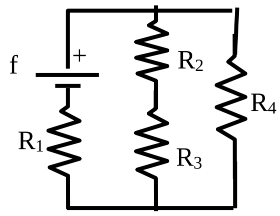
FISICA

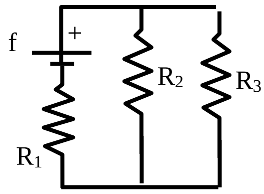
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale
Testo della 16° prova

Da scansionare ed inviare per email entro venerdì 31 maggio

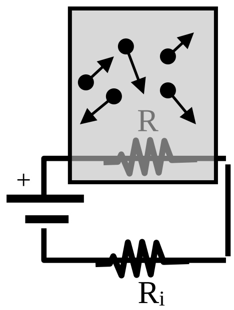
1. Si calcoli l'espressione della potenza dissipata sui resistori R_2, R_3 ed R_4, [f=10V, R_1=2kΩ, R_2=3kΩ, R_3=5kΩ, R_4=8kΩ]



2. Si calcoli il valore minimo della resistenza R_1, per limitare contemporaneamente la corrente e la potenza dissipata sulla resistenza R_1 al di sotto dei valori massimi rispettivamente consentiti I_{max}=2mA, P_{max}=10mW. [Dati f=10V, R_2=4kΩ, R_3=4kΩ]]

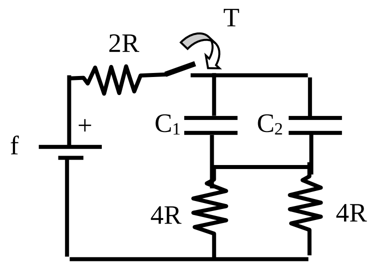


3. Un grande ambiente assimilabile ad un recipiente con pareti rigide contiene n=4 kmoli di un gas monoatomico (He) alla temperatura uniforme di 30°C e alla pressione atmosferica. Il recipiente viene scaldato da una resistenza elettrica R=2Ω collegata ad un circuito con batteria di forza elettromotrice f=100V in continua come indicato in figura con resistenza interna incognita R_i. Il circuito elettrico viene azionato con un interruttore al tempo t=0. Dopo 5 minuti la temperatura del gas si è portata a 40°C. Trovare il valore della resistenza interna R_i. **Facoltativo**: calcolare il valore della pressione interna al recipiente dopo 5 minuti considerando costante il volume del recipiente. [La costante dei gas vale R=8314 J K^{-1} $kmol^{-1}$]

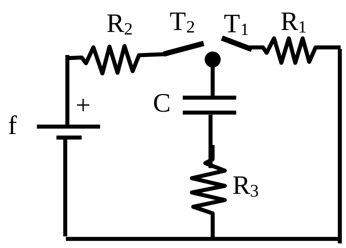


4. Un resistore di resistenza R=50Ω è collegato, all'istante di tempo t=0, ad un condensatore carico di capacità C=15μF. Sapendo che l'energia dissipata dal resistore dopo un intervallo di Δt=2ms vale E_J=1.5mJ determinare la carica iniziale sulle armature del condensatore.

5. I due condensatori indicati in figura hanno carica inizialmente nulla prima delle chiusura dell'interruttore T. Determinare la costante di tempo complessiva nel processo di carica dei condensatori che ha inizio in t=0 quando l'interruttore T viene chiuso. Determinare anche la carica presente sul condensatore C_1 dopo t=3ms dalla chiusura [f=10V, R=1kΩ, C_1=8μF, C_2=2μF]



6. Sul condensatore C è inizialmente presente una carica q_o=1μC. Nell'istante t=0 viene chiuso il solo tasto T_1 in modo che il condensatore possa scaricarsi sulla resistenza R_1. Dopo un tempo t_1=10ms vengono azionati contemporaneamente gli interruttori T_1 (da chiuso ad aperto) e T_2 (da aperto a chiuso) così da poter ricaricare il condensatore tramite la forza elettromotrice f=3V. Determinare quanto tempo occorre per ricaricare il condensatore al livello di partenza q_o. [**Dati**: R_1=25kΩ, R_2=15kΩ, R_3=25kΩ, C=1μF]



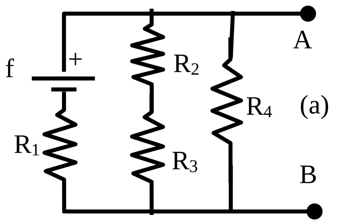
FISICA

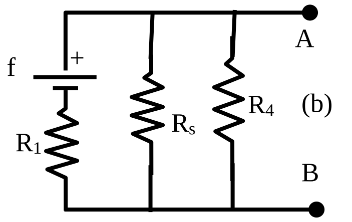
A.A. 2023-2024

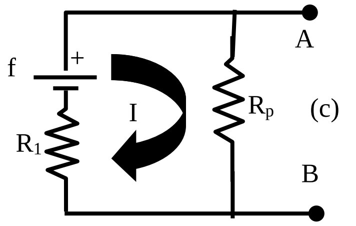
Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 16° prova

1. Il circuito in figura a) è composto da due maglie ma può essere ridotto ad una maglia componendo i rami resistivi: nel ramo centrale la corrente attraversa in serie le resistenze R_2 ed R_3 cui può essere sostituita la resistenza serie $R_s=R_2+R_3$ figura b). Il ramo centrale ed il ramo resistivo a destra risultano in parallelo e possono essere sostituiti da una unica resistenza $R_p=(R_2+R_3)//R_4$ come in figura c). La corrente di maglia è data quindi dalla formula







$$I=\frac{f}{R_1+R_p} \quad \text{dove} \quad R_p=\frac{R_s\cdot R_4}{R_s+R_4}=\frac{(R_2+R_3)\cdot R_4}{R_2+R_3+R_4}=4\text{k}\Omega \quad \text{da cui} \quad \mathbf{I=1.67mA}$$

La differenza di potenziale fra i punti A e B vale per la legge di Ohm

$$V_A-V_B=I\cdot R_p=\mathbf{6.67V}$$

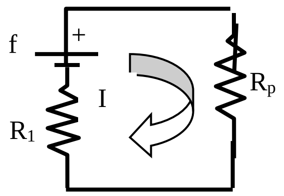
Da cui la corrente che transita in R_2 ed R_3 è $I_{23}=\dfrac{V_A-V_B}{R_s}=\mathbf{0.833\ mA}$

mentre la corrente che transita in R_4 è $I_4=\dfrac{V_A-V_B}{R_4}=\mathbf{0.833\ mA}$

Le potenze dissipate infine vengono calcolate dalle relazioni:

$$\begin{cases} P_{R2}=I_{23}^2\cdot R_2=2.78mW \\ P_{R3}=I_{23}^2\cdot R_3=2.78mW \\ P_{R4}=I_4^2\cdot R_4=5.56mW \end{cases}$$

2. Il circuito può ricondursi ad una sola maglia, calcolando la resistenza parallelo



$$R_p=\frac{R_2\cdot R_3}{R_1+R_3}=\frac{4k\Omega\cdot 4k\Omega}{8k\Omega}=2k\Omega$$

La corrente circolante nella maglia si calcola dividendo la forza elettromotrice fornita dalla batteria per la somma delle resistenze attraversate dalla medesima corrente di maglia

$$I=\frac{f}{R_1+R_p}\le I_{\max} \quad \text{da cui} \quad R_1\ge=\frac{f}{I_{\max}}-R_2=\frac{10}{0.001}\left(\frac{V}{A}\right)-2000\Omega=8000\Omega=8k\Omega$$

Che rappresenta la 1ª disequazione

La seconda condizione riguarda la potenza massima dissipabile su R_1. In generale la potenza dissipata P su una resistenza R attraversata da una intensità di corrente I si ottiene dalla espressione dell'effetto Joule combinato con la legge di Ohm

$$P=\Delta V\cdot I=(I\cdot R)\cdot I=I^2R=f^2\frac{R_1}{(R_1+R_p)^2}\le P_{\max}$$

Questo porta alla disequazione $\left(R_1+R_p\right)^2-\left(\dfrac{f^2}{P_{\max}}\right)R_1\geq 0$ da cui $R_1^2+\left(2R_p-\dfrac{f^2}{P_{\max}}\right)R_1+R_p^2\geq 0$

Le soluzioni sono $R_1=\left(\dfrac{f^2}{2P_{\max}}-R_p\right)\pm\sqrt{\left(\dfrac{f^2}{2P_{\max}}-R_p\right)^2-R_p^2}=\left(\dfrac{f^2}{2P_{\max}}-R_p\right)\pm\sqrt{\dfrac{f^4}{4P_{\max}^2}-\dfrac{f^2R_p}{P_{\max}}}=$

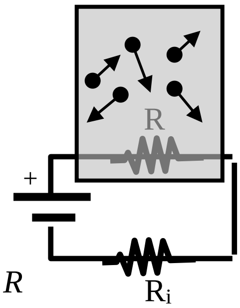
Quindi la seconda disequazione è **R_1>5.23 kΩ oppure R_1< 764 Ω**

che messa a sistema con la prima disequazione **R_1>8 kΩ**

fornisce il risultato finale che soddisfa entrambe le limitazioni **R_1>8 kΩ**

3. Il circuito elettrico formato da una sola maglia

la **intensità di corrente elettrica** si calcola con la formula $I=\dfrac{f}{R+R_i}$



La **potenza dissipata** sulla resistenza R

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** è infine $Q=P\cdot\tau=\dfrac{f^2R}{\left(R+R_i\right)^2}\tau$

Dalla quale si esplicita il valore della resistenza interna $R_i=\sqrt{\dfrac{f^2R\cdot\tau}{Q}}-R$

Il calore Q deve riscaldare n= moli di gas monoatomico: $Q=nc_v\Delta T=\dfrac{3}{2}nR_{gas}\Delta T=4.988\ 10^5$ J

Combinando le equazioni si ottiene $R_i=\sqrt{\dfrac{2f^2R\cdot\tau}{3nR_{gas}\Delta T}}-R=$ **1.47 Ω**

Facoltativo:

Nelle transformazioni a volume costante $p=p_o\dfrac{T}{T_o}=101300\dfrac{273.15+40}{273.15+30}$ **= 1.046·10⁵ Pa**

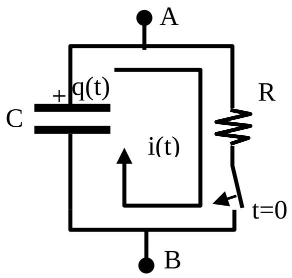
4. Processo di scarica di un condensatore

La differenza di potenziale ai capi del condensatore vale $V_A-V_B=\dfrac{q}{C}=iR$

dove la corrente di scarica causa una diminuzione della carica del condensatore $i=-\dfrac{dq}{dt}$

L'equazione differenziale risultante è quindi $\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{RC}=0$

con soluzione $q(t)=q_o\exp(-t/RC)$



La **corrente nel circuito** è quindi $i(t) = \frac{q(t)}{RC} = \frac{q_o \exp(-t/RC)}{RC}$

La **potenza dissipata** per effetto Joule sul resistore è $P_J(t) = i^2(t)R = \frac{q_o^2}{RC^2}\exp(-2t/RC)$

che integrata dà luogo all'energia dissipata $E_j = \int_0^{\Delta t} P_j(t)dt = \frac{q_o^2}{2C}\left[1-\exp(-2\Delta t/RC)\right]$

(Allo stesso risultato si giunge rilevando che il processo di dissipazione sulla resistenza causa una diminuzione dell'energia immagazzinata nel condensatore
$E_j = U(0) - U(\Delta t) = \frac{q_o^2 - q^2(\Delta t)}{2C} = \frac{q_o^2}{2C}\left[1-\exp(-2\Delta t/RC)\right]$

Invertendo l'espressione si ottiene il valore della **carica iniziale**
$q_o = \sqrt{\frac{2E_jC}{1-\exp(-2\Delta t/RC)}} = \mathbf{212.6\ \mu C}$

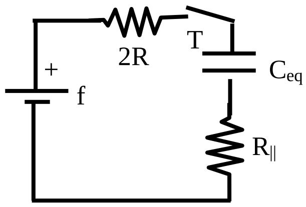
5. I condensatori sono disposti in parallelo. Il condensatore equivalente ha quindi capacità $C_{eq} = C_1 + C_2 = \mathbf{10\ \mu F}$.

Le due resistenze in parallelo sono equivalenti alla resistenza $R_{\|} = \frac{4R \cdot 4R}{4R + 4R}$ =2R=**2kΩ**.

Alla chiusura dell'interruttore la resistenza complessiva di maglia è $R_{maglia} = R_{\|} + 2R =$ **4kΩ.**

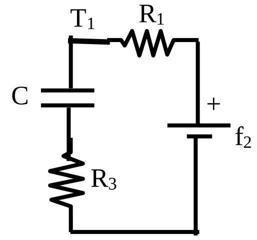
La costante di tempo complessiva del processo di carica è $\tau = R_{maglia}C_{eq} = \mathbf{40ms}$

Il circuito equivalente è quindi costituito da una sola maglia e la tensione ai capi della capacità segue la legge del processo di carica $V_c(t) = f\left(1-\exp(-t/\tau)\right)$



La carica ai capi del condensatore C_1 è quindi
$Q_1(t) = V_cC_1 = fC_1\left(1-\exp(-t/\tau)\right)$. Per t*=3ms vale $Q_1(t^*) = \mathbf{5.78\mu C}$

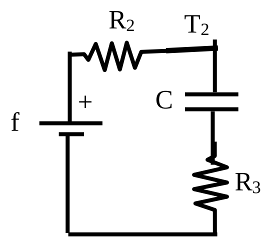
6. Primo processo di scarica



La resistenza di maglia è $R_{tot1} = R_1 + R_3 = 50\ k\Omega$
Il tempo caratteristico di scarica $\tau_1 = R_{tot1}C = \mathbf{50ms}$

La carica ai capi del condensatore dopo Δt_1 è quindi $q(\Delta t_1) = q_o \exp(-\Delta t_1/\tau_1)$

Secondo processo di carica



La resistenza di maglia è $R_{tot2} = R_2 + R_3 = 40\ k\Omega$
Il tempo di carica $\tau_2 = R_{tot2}C = \mathbf{40ms}$

A partire dal nuovo tempo t>0, ai capi del condensatore si registra la sovrapposizione del processo di carica operata da f e quello di scarica della carica pre-esistente $q(t) = fC[1 - \exp(-t/\tau_2)] + q(\Delta t_1)\exp[-t/\tau_2]$

Imponendo $q(\Delta t_2) = q_o$ si ottiene $fC[1 - \exp(-\Delta t_2/\tau_2)] + q_o \exp[-\Delta t_2/\tau_2]\exp[-\Delta t_1/\tau_1]$

da cui $\exp(-\Delta t_2/\tau_2) = \dfrac{fC - q_o}{fC - q_o \exp[-\Delta t_1/\tau_1]}$ da cui $\Delta t_2 = \tau_2 \ln\left(\dfrac{fC - q_o \exp[-\Delta t_1/\tau_1]}{fC - q_o}\right) = \mathbf{3.5\ ms}$