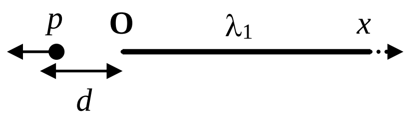
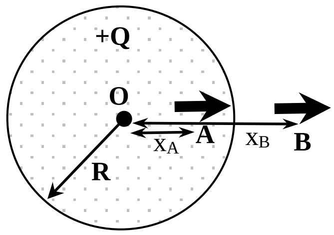
FISICA

A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale
15° prova del 24 Maggio 2024

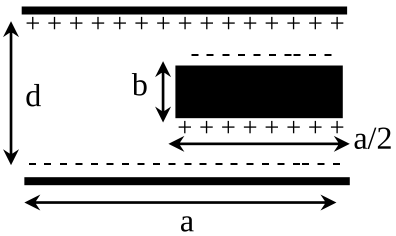
1. Sul semiasse positivo delle ascisse è distribuita una carica con densità lineare uniforme $\lambda_1>0$. Sul semiasse negativo a distanza *d* dall'origine è disposto un dipolo elettrico come in figura. Si determini il vettore campo elettrico prodotto dalla distribuzione lineare in prossimità del dipolo, e la orza attrattiva esercitata sul dipolo. [Dati: λ_1 = 5μC/m, *p*=2nC*m, d=5 cm]



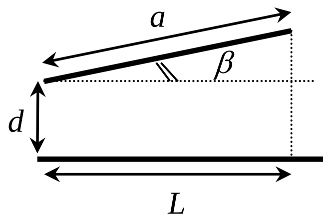
2. Una carica Q=100μC è distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio R=20cm. In un punto A interno alla sfera, distante x_A=10cm dal centro O, è disposto un dipolo elettrico di momento p=$3\cdot10^{-9}$Cm orientato nella direzione radiale come descritto in figura. Determinare l'intensità la direzione ed il verso della forza elettrica cui è sottoposto il dipolo. **R**ipetere il calcolo della forza agente sul dipolo se posizionato in un punto B esterno alla sfera, alla distanza x_B=30cm dal centro O, ed orientato sempre nella direzione radiale.



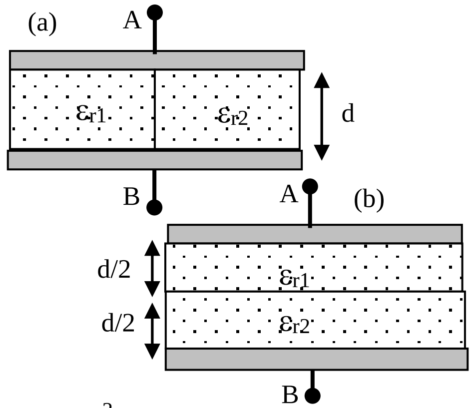
3. Calcolare la capacità del condensatore piano costituito da due armature quadrate di lato *a* poste alla distanza *d* come riportato in figura. All'interno del condensatore è posizionato un conduttore metallico parallelepipedo di spessore *b* e di sezione rettangolare *a* X *a/2.* (suggerimento: ipotizzare la presenza di carica sulle armature superiore ed inferiore e per induzione sulle superfici del condutture metallico con campo nullo all'interno)



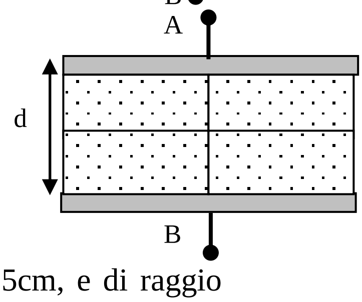
4. Calcolare la capacità del condensatore descritto in figura. Le due armature entrambe quadrate di lato a=10cm, ma non parallele, si trovano ad una distanza minima d=2cm. Indicando con β=5° l'angolo fra le due armature, notiamo che esse non si affacciano perfettamente. In questo caso possiamo assumere che l'effetto di induzione completa tipico nei condensatori riguarda solo una parte dell'armatura inferiore corrispondente alla distanza *L=a cos(β)*..



5. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità di $C_o=8\mu F$. Successivamente viene riempito per metà superficie con un dielettrico di costante $\varepsilon_{r1}=1.4$ e per l'altra metà con un altro dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r2}=1.6$ secondo lo schema in figura (a). Calcolare la nuova capacità ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici. Ripetere l'esercizio per il caso (b) in cui i due dielettrici sono disposti uno sull'altro. Dimostrare che il rapporto fra le capacità dei due condensatori nei due casi vale sempre C_a/C_b >1 per qualunque valore delle costanti dielettriche.



6. Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di sezione S=1cm^2 distanziate d=1mm. Avendo a disposizione 4 blocchi dielettrici di medesima forma parallelepipeda di materiali differenti con costanti dielettriche relative ε_{r1}=1.5, ε_{r1}=2, ε_{r3}=3, ε_{r4}=1.2 ma con sezioni S/2 e spessori d/2 che ben si adattano a riempire completamente lo spazio fra le armature, determinare quale sequenza di dielettrici garantisce la capacità minima e quale la capacità massima.



7. Un condensatore è formato da due cilindri coassiali di lunghezza comune L=5cm, e di raggio rispettivamente R_1=5mm ed R_2=8mm. Esso è riempito con un dielettrico non omogeneo di costante dielettrica relativa funzione della distanza *r* dall'asse dei cilindri $\varepsilon_r(r)=R_2/r$. Determinare la capacità complessiva del condensatore in esame.

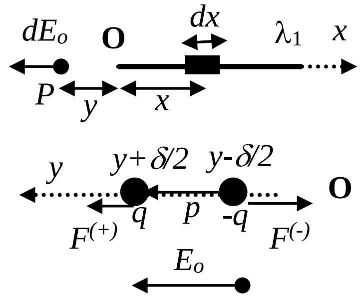
FISICA

A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 15ª prova

1. Alla distanza generica x dall'origine O si trova la carica $dq=\lambda_1 dx$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_o = \lambda_1 dx \big/ 4\pi\varepsilon_o (x+y)^2$ nel punto P a distanza y dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse y (contrario all'asse x) quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle x fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a $E_o = \int dE_o = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty dx \big/ (x+y)^2 = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o y}$. La forza cui è sottoposto un dipolo p a distanza y dall'origine O si può determinare a partire dall'energia configurazionale del dipolo $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_o = -\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y}$, calcolandone il gradiente rispetto alla coordinata y libera del dipolo: $F_y = -grad_y U = \dfrac{d}{dy}\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y} = -\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2} =$ **-0.036 N**

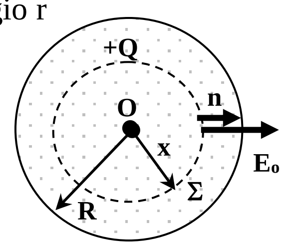


La forza è quindi contraria all'asse y risultando quindi attrattiva diretta verso il filo uniformemente carico. Alternativamente tale forza può essere determinata come risultante della forza agente sulla carica positiva del dipolo $F^{(+)}$ posizionata in $y+\delta/2$ e della forza agente sulla carica negativa del dipolo $F^{(-)}$ posizionata in $y+\delta/2$. La risultante delle due forze vale quindi $F_y = F^{(+)} + F^{(-)} =$

$$= q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o (y+\delta/2)} - q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o (y-\delta/2)} = \frac{-q\lambda_1\delta}{4\pi\varepsilon_o \left(y^2-(\delta/2)^2\right)} \cong \frac{-\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2}$$

2. Calcolo del campo elettrico della distribuzione

Dapprima si calcola il flusso di campo elettrico uscente da una sfera di raggio r concentrica alla distribuzione data $\Phi_\Sigma(E_o) = \iint_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = E_o (4\pi r^2)$



Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta interna (r<R)

$$\Phi_{\Sigma\,\text{int}} = E_{o\,\text{int}}(4\pi r^2) = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_o} \quad \text{da cui} \quad E_{o\,\text{int}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$$

La forza agente su di un dipolo disposto internamente nel punto A vale

$$\vec{F} = -\nabla U_{dipolo} = -\nabla\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}_o\right) = \nabla\left(\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_o R^3} r\right) \quad \text{da cui} \quad F_r = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_o R^3} = \mathbf{0.337\ N} \ \text{(verso l'esterno)}$$

(si noti che la forza è indipendente dalla posizione del punto A!)

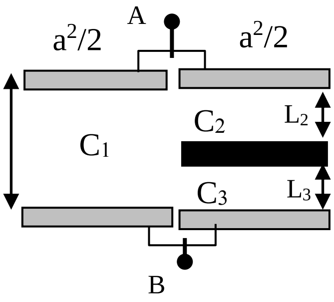
Facoltativo: Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta esterna (r>R)

$$\Phi_{\Sigma ext} = E_{oext}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \text{da cui} \quad E_{oext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

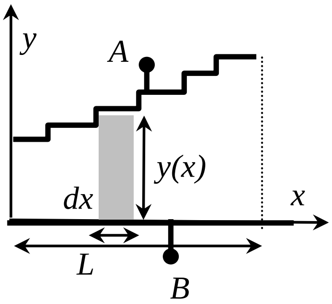
la forza agente su un dipolo esterno è quindi $\vec{F} = \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}_o\right) = \nabla\left(\dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)$

che per $r=x_B$ fornisce il valore $F_r = -2\dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_o r^3} =$ **0.2 N** (verso l'interno)

3. Il dispositivo può essere visto come un condensatore di capacità $C_1 = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{d}$ locato nel semispazio sinistro in parallelo con la serie dei due condensatori del semispazio destro $C_2 = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{L_2}$ e $C_3 = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{L_3}$. Questi ultimi sono dotati di una capacità complessiva $C_{serie} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{L_2 + L_3} = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{d-b}$. La capacità totale è quindi data dal parallelo di C_1 e C_{serie} $C_{tot} = C_1 + C_{serie} = \varepsilon_o a^2 \dfrac{2d-b}{2(d-b)}$.



4. L'armatura obliqua superiore *A* può pensarsi scomponibile in una serie infinita di gradini di lunghezza *dx* ed altezza *dy*. Ciascun gradino forma con l'armatura inferiore *B* un condensatore piano (regione grigia) di sezione *adx*, e capacità $dC = \varepsilon_O \, adx/y$, dove la distanza fra le armature è variabile $y(x) = d + x \cdot tg\beta$. La capacità dell'intera struttura è data dalla somma di tutte le capacità *dC* di tutti gli infiniti condensatori piani in parallelo, da cui si ottiene

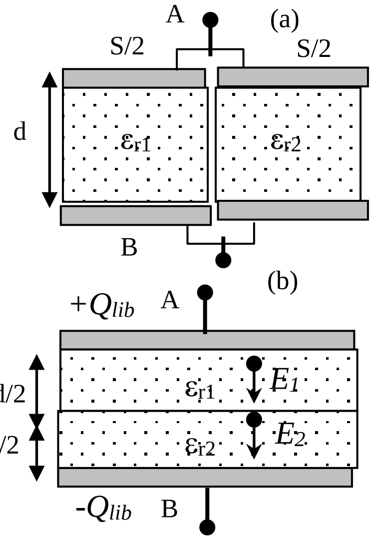


$$C = \int dC = \int_0^L \varepsilon_O \frac{a}{y} dx = \varepsilon_O a \int_0^{a\cos\beta} \frac{dx}{d + x \cdot tg\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta} \left[\ln\left| d + x \cdot tg\beta \right| \right]_0^{a\cos\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta} \ln\left(1 + \frac{a sin\beta}{d} \right) = \mathbf{3.66\ pF}$$

5. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto capacità $C_o = \varepsilon_o S/d$ dove *S* è la sua sezione e *d* la distanza fra le armature. Quando viene riempito con due dielettrici di costanti dielettriche relative ε_{r1} ε_{r2} come in figura *a*, la capacità complessiva può pensarsi come il parallelo delle due capacità che competono ai due condensatori di metà superficie *S/2*:

$$C_a = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \frac{S/2}{d} = \varepsilon_o \frac{S}{d} \left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2} \right) = C_o \left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2} \right) =$$

=1.5 C_o=12μF.

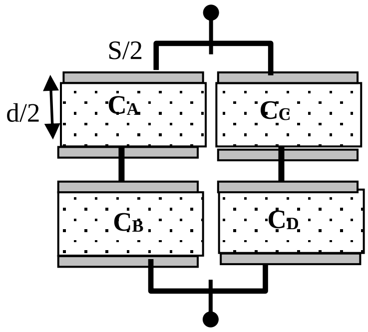


Nel caso (*b*), posta sul conduttore *A* la carica Q_{lib},, i campi elettrici nei due dielettrici sono rispettivamente a $E_1 = \sigma_{lib}/\varepsilon_o \varepsilon_{r1} = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r1}$ e $E_2 = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r2}$ (campi uniformi). La differenza di potenziale che si instaura fra le due armature è $V_A - V_B = \int_A^B E dl = E_1 \dfrac{d}{2} + E_2 \dfrac{d}{2} = \dfrac{Q_{lib} d}{2S\varepsilon_o} \dfrac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$ e quindi la capacità

$$C_b = \frac{Q_{lib}}{V_A - V_B} = \varepsilon_o \frac{S}{d} \left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \right) = C_o \left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \right) = 11.95\mu F$$ e

E' facile trovare che vale sempre $C_a > C_b$. Ciò corrisponde alla condizione $\left(\frac{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}{2}\right) > \left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}\right)$

da cui $\varepsilon_{r1}^2 - 2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r2}^2 > 0$ e quindi $(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2 > 0$ che è sempre vera se $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$.



6. Il condensatore può essere visto come formato da 4 condensatori di sezione S/2 e spessore d/2 di capacità generica $C = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S/2}{d/2} = \varepsilon_r C_o$

I condensatori sono disposti in modo tale che A e B sono in serie tra loro dando vita ad una capacità del lato sinistro $C_s = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = C_o \frac{\varepsilon_A \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B}$ così come i condensatori C e D sono tra loro in serie dando luogo ad una capacità complessiva del lato destro $C_d = \frac{C_C C_D}{C_C + C_D} = C_d \frac{\varepsilon_C \varepsilon_D}{\varepsilon_C + \varepsilon_D}$

La capacità totale del sistema si ottiene calcolando il parallelo complessivo $C_{tot} = C_s + C_d = C_o \left(\frac{\varepsilon_A \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} + \frac{\varepsilon_C \varepsilon_D}{\varepsilon_C + \varepsilon_D} \right) = C_o \frac{\varepsilon_A\varepsilon_B\varepsilon_C + \varepsilon_A\varepsilon_B\varepsilon_D + \varepsilon_A\varepsilon_C\varepsilon_D + \varepsilon_B\varepsilon_C\varepsilon_D}{(\varepsilon_A + \varepsilon_B)(\varepsilon_C + \varepsilon_D)}$. Si noti che il numeratore è indipendente dalla disposizione di ABCD mentre per minimizzare/massimizzare la capacità occorre massimizzare/minimizzare il denominatore. Nel nostro caso il valore minimo del denominatore si ha per $(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r4})(\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}) = 13.5$ cui corrisponde la capacità **C_{max}=1.65pF**
ed il massimo $(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})(\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4}) = 14.7$ cui corrisponde la capacità **C_{min}=1.52pF**

7. Il vettore campo elettrico, come in ogni condensatore ideale, è non nullo solo nello spazio fra le armature del condensatore, avendo intensità $E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o r L (R_2/r)} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L R_2}$ (per $R_1<r<R_2$) risulta inaspettatamente di intensità costante in tutto il condensatore. Questa condizione è dovuta alla particolare disomogeneità del dielettrico che compensa il tradizionale andamento 1/r che E avrebbe avuto se non ci fosse stato il dielettrico. La differenza di potenziale fra le due armature si calcola quindi come $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L} \frac{R_2 - R_1}{R_2}$, da cui la capacità

$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon_o L \frac{R_2}{R_2 - R_1} =$ **7.4 pF**