FISICA

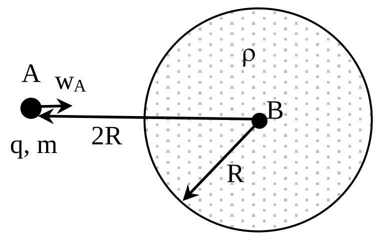
A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale

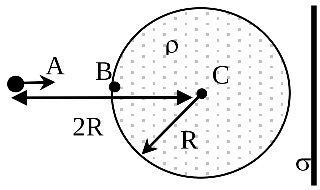
14° prova del 21 Maggio 2024

Gli elaborati dovranno essere scansionati e inviati entro Venerdì 24 Maggio.

1. Data una sfera di raggio R=1m uniformemente carica con densità volumetrica ρ=50μC/m^3, determinate la velocità minima w_A con cui deve essere lanciata una particella di massa m=15g e di carica q=1μC distante 2R dal centro della sfera (punto A) affinché possa raggiungere il centro della sfera (punto B).



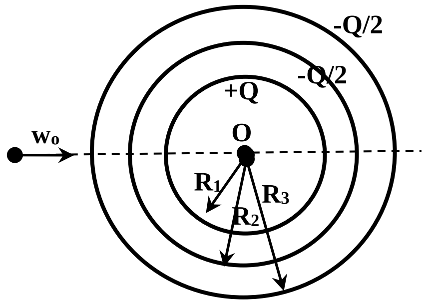
2. Una carica puntiforme positiva deve essere lanciata contro una sfera di raggio R=8cm, carica con densità volumetrica uniforme ρ=200μC/m^3. Il lancio viene inizialmente pensato in modo che la carica parta dal punto A (distante 2R dal centro), penetri la sfera fino a raggiungere il centro C con velocità nulla. In un secondo momento si decide di porre uno schermo piano uniformemente carico con densità σ per evitare che la carica puntiforme penetri nella sfera. A parità di condizioni iniziali, quale dovrà essere il valore di σ minimo affinché essa possa al più toccare la superficie della sfera (punto B) ma non penetrarla?



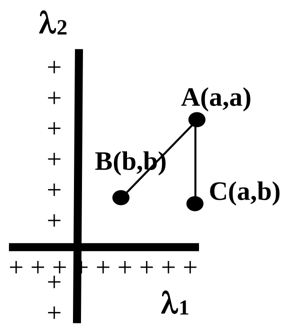
3. Una sfera cava di raggio esterno R_2=1m e raggio interno R_1=0.6 m è uniformemente carica con densità volumetrica ρ=12μC/m^3 nella regione interna individuata dalla condizione $R_1 \le r \le R_2$. Determinare il lavoro necessario per trasportare una carica q=2μC dall'infinito nel centro della sfera cava.

4. Date tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato *l*, calcolare il campo elettrico ed il potenziale al centro del triangolo. Dare il valore numerico per *l*=3cm, $q_1 = q_2 = -q_3 = 5\mu C$.

5. Tre gusci conduttori sferici di raggio rispettivamente R_1, R_2, R_3, e di carica corrispondente +Q, -Q/2, -Q/2 sono disposti in modo da avere centro comune O. Una carica puntiforme +q di massa m viene lanciata lungo una traiettoria radiale dall'esterno contro i gusci. Determinare le velocità con cui la carica attraversa ciascun guscio, supponendo di poterlo penetrare senza attriti. [**Dati**: R_1=1cm, R_2=4cm, R_3=5cm, Q=1μC, q= 10nC, m=1g, w_o=4m/s]



6. Due fili indefiniti uniformemente carichi con densità uniforme λ_1, λ_2 sono disposti sugli assi x ed y rispettivamente in direzioni quindi ortogonali intersecantisi nell'origine O. Una carica positiva q ferma nel punto A(a,a) viene portata nel punto B(b,b) in quiete per effetto di azioni esterne. Determinare il lavoro L_{AB} svolto dalle azioni esterne, contrarie a quelle elettrostatiche, per spostare la carica dal punto A al punto B. Ripetere l'esercizio per analogo spostamento da A al punto C(a,b). [Dati: q=1μC, λ_1=100μC/m, λ_2=300μC/m, a=2cm, b=1cm].



FISICA

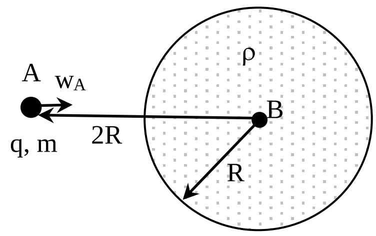
A.A. 2023-2024
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 14° prova

1. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica centrata in B e di raggio generico *r* assume l'espressione $\Phi\left(\vec{E}_o\right) = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 4\pi r^2 E_o = Q_{\text{int}}/\varepsilon_o$

dove $Q_{\text{int}} = \begin{cases} r < R & = \rho\left(4\pi r^3/3\right) \\ r > R & = \rho\left(4\pi R^3/3\right) \end{cases}$ da cui si ottiene il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_o = \rho\, r/3\varepsilon_o \\ r > R & E_o = \rho\, R^3/3\varepsilon_o r^2 \end{cases}$

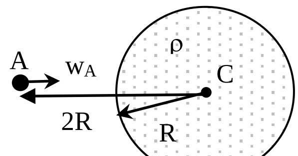
e, dopo integrazione, il potenziale $\begin{cases} r < R & V_o(r) = \int_r^R E_o dr + V_o(R) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}\left(3R^2 - r^2\right) \\ r > R & V_o(r) = \int_r^\infty E_o dr = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r} \end{cases}$ ove si è assunto nullo il potenziale all'infinito. La differenza di potenziale fra i punti B ed A assume quindi il valore $\Delta V_{BA} = V_o(0) - V_o(2R) = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_o} > 0$ valore che conferma la necessità di lanciare q alla velocità w_A

Dalla conservazione dell'energia meccanica nei punti A,B quindi $qV_A + T_A = qV_B + T_B$. In questo caso la velocità iniziale minima w_A corrisponde al caso ideale di una velocità finale nulla $w_B=0$, e quindi $T_B=0$.



Da questa condizione $w_A = \sqrt{2\, q \Delta V_{BA}/m} = \sqrt{2\, q\rho R^2/3m\varepsilon_o}$ =15.9 m/s.

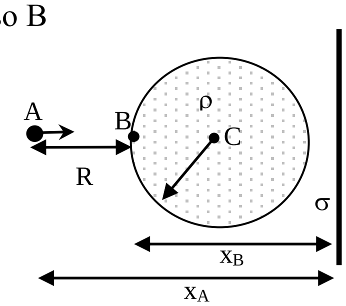
2. La prima parte del problema si imposta, come nel problema precedente, imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso C



$$T_A + qV_A^{sfera} = qV_C^{sfera}$$

dove T_A è l'energia cinetica della particella nel punto A, mentre V^{sfera} è il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione sferica. Nella seconda parte del problema compare una seconda distribuzione di carica (strato piano) che genera un potenziale elettrostatico V^{piano} da aggiungere al precedente. Imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso B

$$T_A + qV_A^{sfera} + qV_A^{piano} = qV_B^{sfera} + qV_B^{piano}$$



Combinando le espressioni ed eliminando i termini comuni T_A, V_A^{sfera} si ottiene

$V_B^{piano} - V_A^{piano} = V_C^{sfera} - V_B^{sfera}$ ossia $\int_{x_B}^{x_A} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = \int_0^R \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} r dr$

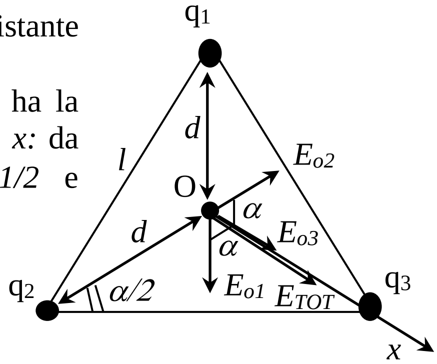
da cui $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} R = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\dfrac{R^2}{2}$ e quindi $\sigma = \rho R/3$ = **5.3μC/m²**

3. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica di raggio generico *r* assume l'espressione $\Phi\left(\vec{E}_o\right) = 4\pi r^2 E_o$. Il campo elettrico $E_o(r)$ ed il potenziale $V_o(r)$ assumono le espressioni

$$\begin{cases} r < R_1 & E_o = 0 \\ R_1 < r < R_2 & E_o = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right) \\ r > R_2 & E_o = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\right) \end{cases} \quad \text{da cui} \begin{cases} r < R_1 & V_o(r) = V_o(R_1) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \\ R_1 < r < R_2 & V_o(r) = \displaystyle\int_r^{R_2} E_o dr + V_o(R_2) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}\left[3R_2^2 - r^2 - \dfrac{2R_1^3}{r}\right] \\ r > R_2 & V_o(r) = \displaystyle\int_r^{\infty} E_o dr = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r}\right) \end{cases}$$

Il lavoro esterno per spostare la carica q nel centro vale $L_{ext} = q[V_o(0) - V_o(\infty)] = \dfrac{q\rho}{2\varepsilon_o}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 0.87$ J

4. Il campo elettrico totale nel punto O è dato dalla somma vettoriale dei tre campi elettrici generati da $q_1=q$, $q_2=q$, $q_3=-q$. Tutti e tre i vettori hanno la stessa intensità $E_{o1} = E_{o2} = E_{o3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o d^2}$ perché il punto O è equidistante dalle tre cariche. Per la simmetria del sistema il campo totale E_{TOT} ha la direzione dell'asse x, e si ottiene proiettando i tre vettori lungo l'asse x: da ciò $E_{TOT} = E_{o1}\cos\alpha + E_{o2}\cos\alpha + E_{o3}$ dove $\alpha=\pi/3$ e per cui $\cos\alpha=1/2$ e $d = l/\sqrt{3}$. Da cui $E_{TOT} = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_o d^2} = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_o l^2} = 3\cdot 10^8$ V/m



Il potenziale totale si ottiene dalla somma algebrica dei tre potenziali

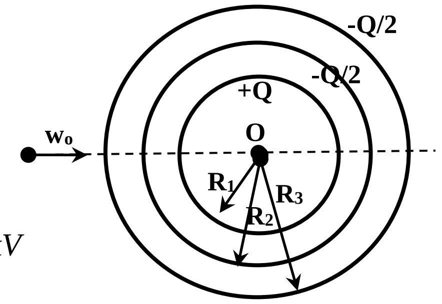
$V(O) = \dfrac{q+q-q}{4\pi\varepsilon_o d} = \dfrac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_o l} =$ **2.6·10⁶ V.**

L'energia configurazionale infine vale $U = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o l} + \dfrac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_o l} + \dfrac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_o l} = \dfrac{q^2 - q^2 - q^2}{4\pi\varepsilon_o l}$ **=-7.5 J**

5. Ciascun guscio conduttore genera un potenziale con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} V_{\text{int}} = \dfrac{Q_{guscio}}{4\pi\varepsilon_o R_{guscio}} \\ V_{ext} = \dfrac{Q_{guscio}}{4\pi\varepsilon_o r} \end{cases}$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti possono calcolarsi i potenziali elettrici dei vari gusci



$$\begin{cases} V_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_3} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_3} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_3} = 0 \\ V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_2} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_2} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_3} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{1}{2R_2} - \dfrac{1}{2R_3}\right) = 22.5kV \\ V_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_1} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_2} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_3} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{2R_2} - \dfrac{1}{2R_3}\right) = 697kV \end{cases}$$

Applicando la conservazione dell'energia tra lo stato iniziale $E_o = \frac{1}{2} m w_o^2 + qV_o = \frac{1}{2} m w_o^2$

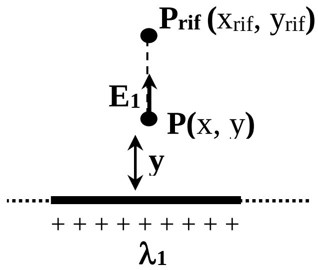
e lo stato generico $E = \frac{1}{2} m w^2 + qV$ possiamo ricavare la velocità $w = \sqrt{w_o^2 - \frac{2qV}{m}}$

da cui le velocità di attraversamento dei gusci sono $w_3 = w_o =$ **5m/s**, $w_2 =$ **3.94 m/s** $w_1 =$ **1.43 m/s**

6. Potenziale elettrico generato da un filo indefinito orizzontale:

Il campo elettrico generato dal filo orizzontale è diretto lungo y e vale in P(x,y) : $E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o y}$

Assumendo il riferimento nel punto P_{rif} (x_{rif}, y_{rif})
il potenziale elettrico si calcola integrando il campo elettrico



$$V^{(1)} = \int_P^{\Pr if} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_y^{yrif} E_1 dy = \int_y^{yrif} \left(\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o y} \right) dy = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{y_{rif}}{y} \right)$$

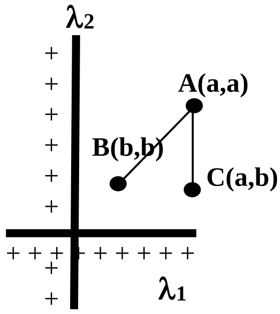
Analogamente per il filo verticale si trova il potenziale

$$V^{(2)} = \int_P^{\Pr if} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_y^{yrif} E_2 dy = \int_y^{yrif} \left(\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x} \right) dx = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{x_{rif}}{x} \right)$$

Il potenziale totale per la sovrapposizione degli effetti vale

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \left[\lambda_1 \ln\left(\frac{y_{rif}}{y} \right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{x_{rif}}{x} \right) \right]$$

In condizioni di equilibrio il lavoro esterno per portare la carica q dal punto A al punto B è contrario a quello svolto dal campo elettrostatico



$$L_{AB}^{ext} = -L_{AB}^{el} = -q(V_A - V_B) = +q(V_B - V_A) =$$

$$L_{AB}^{ext} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o} \left[\lambda_1 \ln\left(\frac{y_A}{y_B} \right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{x_A}{x_B} \right) \right] = \frac{q(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{a}{b} \right) = \mathbf{4.99\ J}$$

Analogamente $L_{AC}^{ext} = \frac{q\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{a}{b} \right) =$ **1.25 J** che è evidentemente inferiore