



FISICA

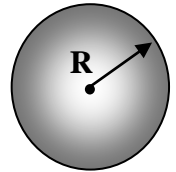
A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale

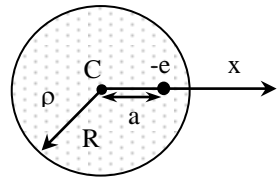
13 prova del 16 Maggio 2023

Gli elaborati dovranno essere spediti entro lunedì 20 Maggio e saranno valutati ai fini dell'esame finale

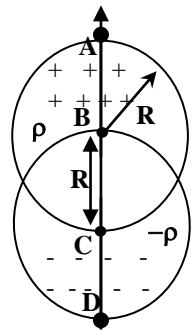
1. Calcolare il campo elettrico $E_o(r)$ di una sfera di raggio R , in cui è disposta una carica con densità non uniforme dipendente dal raggio $\rho(r)=k*r^3$. Ripetere l'esercizio per un cilindro infinito di sezione circolare di raggio R con stessa $\rho(r)$



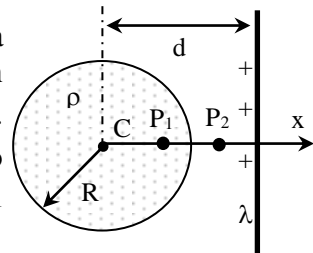
2. Un cilindro di lunghezza infinita e di raggio R è carico con densità volumetrica uniforme $\rho=1\mu\text{C}/\text{m}^3$. All'interno del cilindro si trova un elettrone, inizialmente fermo a distanza $a=1\text{cm}$ dall'asse del cilindro. Descrivere il tipo di moto cui è soggetto l'elettrone, calcolare la velocità con cui esso passa per il punto C dell'asse del cilindro ed il tempo necessario per raggiungere il punto C [la massa dell'elettrone $m_e=9.1\cdot 10^{-31}\text{ kg}$; la carica dell'elettrone: $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$]



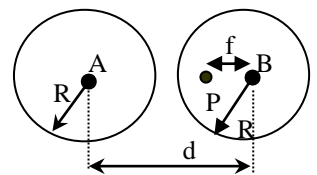
3. Due sfere uniformemente cariche di egual raggio $R=30\text{cm}$ sono compenstrate l'una nell'altra in modo che la distanza fra i due centri B e C sia uguale al raggio R . La distribuzione uniforme di carica vale $+\rho=100\mu\text{C}/\text{m}^3$ per la sfera di centro B ed è di segno opposto con valore $-\rho$ per la sfera di centro C in modo che nella regione di intersezione vi sia assenza di carica. Determinare il campo elettrico nei punti A,B,C,D.



4. Una sfera di raggio $R=3\text{cm}$ è carica con densità volumetrica uniforme ρ . Una seconda carica è distribuita uniformemente su di un filo infinitamente lungo con densità lineare $\lambda = \pi\rho R^2/6$, posto ad una distanza $d=5\text{cm}$ dal centro della sfera C. Determinare la posizione degli unici due punti di equilibrio dove il campo elettrico totale si annulla. Suggerimento: entrambi i punti sono disposti sull'asse x. Il punto P_1 è all'interno della sfera, il punto P_2 all'esterno.



5. Due cilindri paralleli, infinitamente lunghi, di raggio $R=20\text{cm}$ sono alla distanza $d=60\text{cm}$. Sapendo che sul primo è posta una carica positiva distribuita uniformemente con densità volumetrica $\rho_1=3\cdot 10^{-6}\text{C}/\text{m}^3$ e sapendo che non si registra alcun campo elettrico nel punto P posto a distanza $f=6\text{cm}$ dall'asse del secondo cilindro, determinare la densità di carica ρ_2 , supposta uniforme, che deve essere disposta nel secondo cilindro.





FISICA

A.A. 2023-2024

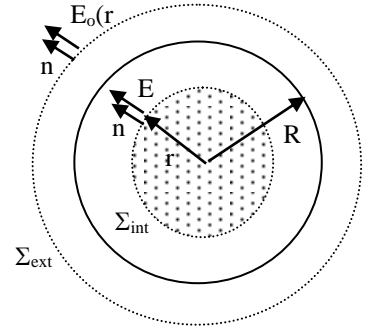
Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 13^a prova

1. Per la simmetria del problema il campo elettrico $E_o(r)$ è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni che si trovano sulla superficie Σ_{int} di raggio $r < R$, il flusso uscente da Σ_{int} vale

$$\Phi_{\Sigma_{int}} = \int_{\Sigma_{int}} \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$$

che per Gauss deve valere Q_{int}/ϵ_o , dove il



valore della carica interna alla superficie Σ_{int} vale

$$Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho (4\pi r^2 dr) = 4\pi k \int_0^r r^5 dr = \frac{4\pi}{6} k r^6$$

Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{int} = kr^4/6\epsilon_o$. Per i punti esterni che si trovano sulla superficie Σ_{ext} di raggio $r > R$, il flusso uscente da Σ_{ext} vale

$$\Phi_{\Sigma_{ext}} = \int_{\Sigma_{ext}} \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$$

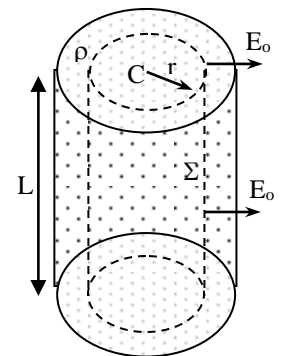
che per Gauss deve valere ancora Q_{int}/ϵ_o . Ma questa volta la

carica contenuta è tutta la carica $Q = \int \rho dV = \int_0^R \rho (4\pi r^2 dr) = 4\pi k \int_0^R r^5 dr = \frac{4\pi}{6} k R^6$. Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo esterno $E_{ext} = kR^6/6\epsilon_o r^2$.

2. Il campo elettrico interno al cilindro può essere calcolato applicando la legge di Gauss alla superficie cilindrica Σ concentrica, di lunghezza L e di raggio $r < R$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_o) = \int \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 2\pi r L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o} = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_o}$$

da cui si ricava il campo elettrico interno $E_{o,int} = \frac{\rho}{2\epsilon_o} r$



L'elettrone quindi è soggetto ad una forza attrattiva diretta lungo l'asse delle x verso il centro C che può essere assimilata alla forza elastica di richiamo di una molla

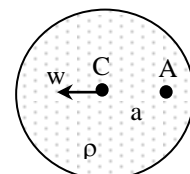
$$m_e a_x = -e E_{ox}, \quad \text{ossia} \quad m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{e\rho}{2\epsilon_o}\right)x, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{e\rho}{2m_e \epsilon_o}\right)x = 0$$

che dà vita ad un moto armonico lungo x , del tipo $x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ dove $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m_e \epsilon_o}{e\rho}} = \mathbf{63 \text{ ns}}$

da cui si ricava il tempo per raggiungere C (un quarto del periodo): $t_c = T/4 = \mathbf{15.75 \text{ ns}}$

L'esercizio poteva anche essere risolto più semplicemente con considerazioni di tipo energetico fra i punti A, C ; $U_A + T_A = U_C + T_C$ ossia $-eV_A = -eV_C + m_e w^2/2$

da cui $w = \sqrt{2e(V_C - V_A)/m_e}$ dove $V_C - V_A = \int_0^a E_{o,int} dr = \frac{\rho a^2}{4\epsilon_o}$



ed in definitiva $w = \sqrt{e\rho a^2/2m_e \epsilon_o} = \mathbf{9.97 \cdot 10^5 \text{ m/s}}$

3. Campo elettrico e potenziale di una sfera uniformemente carica

Il flusso uscente da una superficie sferica di raggio r

$$\text{vale sempre } \Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$$

Campo esterno: applicando Gauss alla superficie Σ_{ext} la carica interna

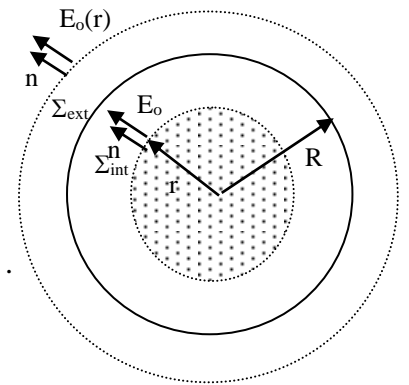
$$\text{coincide con quella totale della sfera } Q_{\text{tot}} = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \text{ da cui } E_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \frac{R^3}{r^2}.$$

$$\text{Potenziale esterno: } V_{\text{ext}} = \int_r^{\infty} E_{\text{ext}} dr = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \frac{R^3}{r}$$

Campo interno: applicando Gauss alla superficie Σ_{int} la carica interna

$$\text{è } Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho(4\pi r^2 dr) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \text{ da cui si ottiene } E_{\text{int}} = \rho r / 3\epsilon_o$$

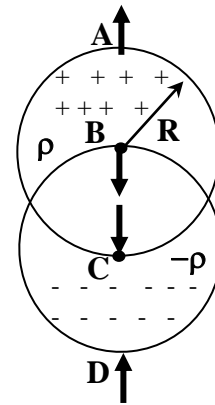
$$\text{Potenziale interno: } V_{\text{int}} = \int_r^R E_{\text{int}} dr + V_{\text{ext}}(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_o} (3R^2 - r^2)$$



Campo elettrico della distribuzione

$$E_D = E_A = E_{A,\text{int}}^{(1)}(R) + E_{A,\text{ext}}^{(2)}(2R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_o} + \frac{-\rho R^3}{3\epsilon_o (2R)^2} = \frac{\rho R}{4\epsilon_o} = 8.48 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

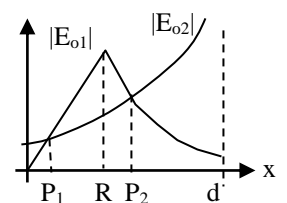
$$E_B = E_C = E_{C,\text{ext}}^{(1)}(R) + E_{C,\text{int}}^{(2)}(0) = \frac{\rho R}{3\epsilon_o} = 1.13 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$



4. La regione di spazio dove è possibile trovare i punti di equilibrio si riduce per ragioni di simmetria al solo semiasse positivo delle x . Lungo tale semiasse la componente E_{ox} del campo elettrico generato dalla distribuzione sferica vale

$$\begin{cases} E_{ox,\text{int}}^{(1)} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} x & 0 < x < R \\ E_{ox,\text{ext}}^{(1)} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \frac{R^3}{x^2} & x \geq R \end{cases}, \text{ mentre la componente } E_{ox} \text{ prodotta dal filo vale}$$

$$\begin{cases} E_{ox}^{(2)} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_o |d-x|} & 0 < x < d \\ E_{ox}^{(2)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o |d-x|} & x \geq d \end{cases}. \text{ E' evidente che la somma algebrica dei campi può}$$



annullarsi solo per punti appartenenti al segmento $0 < x < d$ dove i campi sono discordi ma i valori assoluti possono equivalersi (vedi grafico)

Ricerca del punto di equilibrio P1: per $0 < x < R$, $E_{ox,int}^{(1)} + E_{ox}^{(2)} = 0$ da cui

$$\frac{\rho}{3\epsilon_0} x - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} = 0 \quad \text{ossia} \quad x(d-x) - \frac{3\lambda}{2\pi\rho} = 0 \quad \text{che porta alla equazione di 2° grado}$$

$$x^2 - dx + R^2/4 = 0 \quad \text{con unica soluzione accettabile} \quad x = \frac{d - \sqrt{d^2 - R^2}}{2} = \mathbf{0.5 \text{ cm}}$$

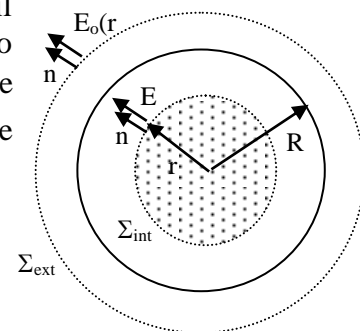
Ricerca del punto di equilibrio P2: per $R < x < d$, $E_{ox,ext}^{(1)} + E_{ox}^{(2)} = 0$ da cui

$$\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} = 0 \quad \text{ossia} \quad (d-x)R^3 - x^2 \frac{3\lambda}{2\pi\rho} = 0 \quad \text{che porta alla equazione di 2° grado}$$

$$x^2 + 4Rx - 4Rd = 0 \quad \text{con unica soluzione accettabile} \quad x = -2R + \sqrt{4R(R+d)} \cong \mathbf{3.8 \text{ cm}}$$

5. Come primo passo conviene determinare, applicando la legge di Gauss, il campo elettrico generato da un cilindro infinitamente lungo uniformemente carico con densità ρ_1 . Il flusso uscente dalla superficie cilindrica generica Σ di raggio r e di altezza L vale $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 2\pi r L E_o(r) = Q_{int}/\epsilon_0$ dove

$$Q_{int} = \begin{cases} \rho_1 \pi r^2 L & r < R \\ \rho_1 \pi R^2 L & r \geq R \end{cases} \quad \text{da cui il campo elettrico} \quad \begin{cases} E_{o,int} = \rho_1 r / 2\epsilon_0 & r < R \\ E_{o,ext} = \rho_1 R^2 / 2\epsilon_0 r & r \geq R \end{cases}$$



Le stesse formule possono essere applicate per la seconda distribuzione ρ_2 .

La condizione di annullamento del campo elettrico nel punto P implica

$$E_{o1}(d-f) = E_{o2}(f) \quad \text{ossia} \quad \frac{\rho_1 R^2}{2\epsilon_0(d-f)} = \frac{\rho_2 f}{2\epsilon_0} \quad \text{da cui} \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{R^2}{f(d-f)} = \mathbf{3.7 \mu C/m^3}$$

