1

a) la retta cercata si può scrivere come intersezione di due piani:

$$\begin{cases} \text{piano perpendicolare a } r \text{ per } P \\ \\ \overline{\pi} \end{cases}$$

$$v_r = (1,1,1) \wedge (2,0,-1) = (1,-3,2)$$

π': $x - 3y + 2z + d = 0$

impongo il passaggio per $P = (1,3,0)$

$$1 - 9 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z + 8 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

b) $v_r = (0, 1, -1) \wedge (2, 0, 1)$

$= (1, -2, -2)$

I piani perpendicolari a r sono quelli del fascio:

$$x - 2y - 2z + d = 0$$

Devo trovare quelli a

distanza 2 da

$P = (1, -2, 3)$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 4 - 6 + d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|d - 1|}{3} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$d - 1 = \pm 6$$

$$d = \pm 6 + 1$$

$$\pi_1 : \; x - 2y + 2z + 7 = 0$$

$$\pi_2 : \; x - 2y + 2z - 5 = 0$$

2)

$$V: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ minore non nullo $\Rightarrow$

il rango è 3

$\Rightarrow \dim V = 5 - 3 = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 - x_2 \\ x_4 = -4x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 6x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$V = \{ (x_1, x_2, x_1 - x_2, -4x_1 + 2x_2, 6x_1 - x_2), \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

base =

$$\{ (1, 0, 1, -4, 6), (0, 1, -1, 2, -1) \}$$

$$U = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x) = -p(x) \}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$p(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3$$

$$p(-x) = -p(x) \iff$$

$$a_0 - \cancel{a_1 x} + a_2 x^2 - \cancel{a_3 x^3} =$$

$$-a_0 - \cancel{a_1 x} - a_2 x^2 - \cancel{a_3 x^3} \Rightarrow$$

$$2a_0 + 2a_2 x^2 = 0 =$$

polinomio nullo

$$\Rightarrow a_0 = a_2 = 0 \Rightarrow$$

$$U = \{ a_1 x + a_3 x^3, \; a_1, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim U = 2$$

$$\text{Base} = \{ x, \; x^3 \}.$$

$$W : \left\{ A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} \\ a_{21} - a_{22} \\ a_{31} - a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{12} \\ a_{21} = a_{22} \\ a_{31} = a_{32} \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \dim W = 6$$

$$\text{Base:} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Big\}$$

3) Dobbiamo trovare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori

$$\det(A - \lambda I_3) = \lambda^2(1-\lambda)$$

$$\Rightarrow \mu_a(0) = 2$$

$$\mu_g(0) = 3 - \rho(A) = 1$$

$$\mu_g(0) < \mu_a(0) \Rightarrow$$

A non è diagonalizz.

Procediamo con B

$$B - \lambda I_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B-\lambda I_3) = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda$$
$$+6-2) = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)$$

$$\lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm 3}{2}$$

$$= 1, 4$$

$$\mu_a(1) = 2$$
$$\mu_a(4) = 1$$

$$\mu_g(1) = 3-\rho(B-I_3)$$

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(B - I_3) = 1$$

B è diagonalizzabile!

V_1 : $x_2 + 2x_3 = 0$

$$V_1 = \{ (x_1, -2x_3, x_3),\ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

base per V_1 = $\{ (1,0,0), (0,-2,1) \}$

V_4: soluzioni di

$$(B - 4I_3) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 3x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_4 = \{ (x_1, x_1, x_1),\ x_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{base} = \{ (1, 1, 1) \}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $f(0,0,0) = (0,0,0,0)$

per qualsiasi funzione f che sia lineare.

Poiché f è definita solo sui vettori $(1,2,1)$ e $(0,-1,2)$,

possiamo conoscere

$f(x_1, x_2, x_3)$ se e solo se

$(x_1, x_2, x_3) \in \langle (1,2,1), (0,-1,2) \rangle$

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow (0,0,1) \notin \langle (1,2,1), (0,-1,2) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} R_3 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} R_3-2R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 2$$

$$(1,0,5) \in \langle (1,2,1), (0,-1,2) \rangle$$

$$(1,0,5) = h_1 (1,2,1) +$$

$$h_2 (0,-1,2) =$$

$$(h_1, 2h_1 - h_2, h_1 + 2h_2)$$

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ 2h_1 - h_2 = 0 \\ h_1 + 2h_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 2 \\ 1 + 4 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1,0,5) = (1,2,1) + 2(0,-1,2)$$

$$\Rightarrow f(1,0,5) = f(1,2,1) +$$

$+ 2f(0,-1,2) =$

$(1,0,2,0) + 2(2,4,5,1)$

$= (5,8,12,2)$

Domande:

1) Una base ortonormale è formata da vettori a due a due ortogonali di norma 1.

Esempio: $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$

2) $\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = \underline{0}_U \}$

$\operatorname{Im} f = \{ u \in U \mid \exists v \in V$

tale che $f(v) = u \}$

3) $V \leq U$ se i generatori

di V sono in U

$(0,0,1,1)$ è nella base

di U data.

$(1,2,0,0) \in U \iff$

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_4 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_4 - 2R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 3$$

$$\Rightarrow (1,2,0,0) \in U$$

$$\Rightarrow V \leq U.$$