(1)

a) Scrivo r in forma cartesiana:

$$r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ 3x+z-1=0 \end{cases}$$

La retta cercata t è intersezione di due piani:

$$t: \begin{cases} \pi_1 = \text{piano contenente } r \text{ per } P \\ \pi_2 = \text{piano ortogonale a } s \text{ per } P \end{cases}$$

$$\vec{v}_g = (1,-1,0) \wedge (0,1,-1)$$

$$= (1,1,1)$$

π_1: $\lambda(x+y+1) + \mu(3x+z-1) = 0$

passa per P se:

$$\lambda(3) + \mu(3) = 0$$

$$\lambda = -\mu$$

π_1: $2x - y + z - 2 = 0$

π_2: $x + y + z + d = 0$

passa per P se

$$3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$t: \begin{cases} 2x-y+z-2=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$$

b) $$d(P,\pi) = \frac{|2x-y+z-1|}{\sqrt{4+1+1}} =$$

$$= 3 \Rightarrow$$

$$2x-y+z-1 = \pm 3\sqrt{6}$$

$$\pi_1: \quad 2x-y+z-1-3\sqrt{6}=0$$

$$\pi_2 \quad 2x-y+z-1+3\sqrt{6}=0$$

(2)

a) Gli insiemi che si possono completare ad una base sono gli insiemi indipendenti

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow S_1$ è dipendente

$\Rightarrow S_1$ non si può completare

$$\rho\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow S_2$ è indipendente

$\Rightarrow S_2$ si può completare

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} R_2 - 2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Non ho pivot sulla

2^a e 4^a colonna $\Rightarrow$

per completare uso i vettori $(0,1,0,0)$ e $(0,0,0,1)$ $\Rightarrow$

$$B = \{(3,1,0,1),(6,2,-1,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$$

b) La base B è ortonormale $\Rightarrow$

$$h_1 = (3,0,1)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$h_2 = (3,0,1)\cdot\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) =$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$h_3 = (3,0,1)\cdot\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$= -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ -7/3 \end{pmatrix}$$

(3) $f(1,1,0) = 2(1,1,0)$

per definizione di autovettore di f

$\mathrm{Ker} f: \; 2x_1 - x_2 = 0$

$\mathrm{Ker} f = \{ (x_1, 2x_1, x_3), \; x_1, x_3 \in \mathbb{R} \}$

Base per Ker f: $\{(1,2,0),$
$(0,0,1)\}$

I vettori $B = \{(1,1,0), (1,2,0),$
$(0,0,1)\}$ sono linearmente
indipendenti $\Rightarrow$ B è una
base $\Rightarrow$

la matrice che rappresenta
f rispetto alla base B
del dominio e la canonica
del codominio è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(3, 3, 0):$$

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 = 3$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

Soluzioni: $\left\{ \left(\frac{3}{2}, x_2, x_3\right), \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$$f^{-1}(3,3,0) = \frac{3}{2}(1,1,0) + \underbrace{x_2(1,2,0) + x_3(0,0,1)}_{\mathrm{Ker}\, f}$$

$$= \frac{3}{2}(1,1,0) + \mathrm{Ker}\, f.$$

4. $\det(A - \lambda I_4) =$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -\lambda & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)$$

$$= \lambda^2 (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0, \quad \mu_a(0) = 2$

$\lambda = 1, \quad \mu_a(1) \Rightarrow \mu_g(1) = 1$

$\lambda = 2$, $\mu_a(2) = 1 \Rightarrow \mu_g(2) = 1$

devo trovare $\mu_g(0)$

$\rho(A) = 3 \Rightarrow \mu_g(0) =$

$4 - 3 = 1 < \mu_a(0) \Rightarrow$

la matrice non è diagonalizzabile

Domande

1) gli autovettori di A sono vettori di $\mathbb{R}^3$, in $\mathbb{R}^3$ gli insiemi indipendenti hanno cardinalità al più 3.

2) A e B si dicono simili se $\exists$ una matrice invertibile P

tale che

$$B = P^{-1} A P$$

A e B avranno lo stesso determinante, lo stesso rango, lo stesso polinomio caratteristico (quindi gli stessi autovettori)

3) le soluzioni formano un sottospazio se $\underline{b} = \underline{0}$

la dimensione è 2 se e solo se $\rho(A) = 3$