1

a) $V_2 = (3,1,1)$

Vettore normale al piano = $(1,0,-2)$

$$\theta = \arcsin \frac{(3,1,1)(1,0,-2)}{\|(3,1,1)\| \cdot \|(1,0,-2)\|} =$$

$$= \arcsin \frac{1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{55}}$$

b) Dobbiamo stabilire la posizione reciproca delle rette

$v_2 = (1,0,-1) \wedge (0,1,2) =$

$(1, -2, 1)$

$v_s = (1, 1, -2)$

r e s non sono parallele.

$$r \cap s : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1-2t \\ x - z + 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+t+1+2t+1=0 \\ t-2-4t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3t+3=0 \\ -3t-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sistema incompatibile

$\Rightarrow r \cap s = \emptyset \Rightarrow$ le due rette sono sghembe.

Troviamo piano per r parallelo a s:

$$\lambda(x-z+1) + \mu(y+2z) = 0$$

$$\lambda x + \mu y + z(-\lambda+2\mu) + \lambda = 0$$

il piano è parallelo a

$s \perp \pi$ se

$$(\lambda, \mu, -\lambda+2\mu) \cdot (1,1,-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu + 2\lambda - 4\mu = 0$$

$$3\lambda - 3\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 1$$

$$\pi: \quad x + y + z + 1 = 0$$

$d(r, s) = d(P, \pi)$ dove

P è un punto qualsiasi di

s, dunque prendo

$$P = (1, 0, -1)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 - 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) a) $\dim V = 2 \Rightarrow V$ è definito

da $4-2=2$ equazioni lineari

omogenee indipendenti

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \iff$

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

orlo questo minore

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -4\,(x_3 - 2x_1) = 0$$

$$\iff x_3 - 2x_1 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x_3 - 2x_2 = 0$$

$$V: \begin{cases} x_3 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

I 3 generatori di U sono indipendenti $\Rightarrow \dim U = 3$

$\Rightarrow$ U è definito da $4-3=1$ equazioni indipendenti

Tutti e 3 i vettori della base hanno $x_3 = 0 \Rightarrow$

$U: \; x_3 = 0$

$$U \cap V = \begin{cases} x_3 - 2x_1 = 0 \\ x_3 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow U \cap V = \{ (0,0,0,x_4),\ x_4 \in \mathbb{R} \}$

$\dim U \cap V = 1$

$B_{U \cap V} = \{ (0,0,0,1) \}$

b) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$

$\Rightarrow a_0 = -2a_1 - 4a_2 - 8a_3$

$$U = \{-2a_1 - 4a_2 - 8a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \dim U = 3$$

$$B_U = \{-2+x,\ -4+x^2,\ -8+x^3\}$$

(3) $(0,0,1) = h_1(1,1,0) + h_2(0,1,0) + h_3(0,2,-1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_1 + h_2 + 2h_3 = 0 \\ -h_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 2 \\ h_3 = -1 \end{cases}$$

$$f(0,0,1) = 0 \cdot f(1,1,0) + 2f(0,1,0)$$

$$- f(0,2,-1) = 2(-1,1) - (3,1)$$

$$= (-2,2) - (3,1) = (-5,1)$$

La matrice che rappresenta f rispetto alla base $B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,2,-1)\}$ del dominio e la canonica del codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare Ker f devo risolvere $A \cdot \underline{x} = 0$

Riduco A a gradini

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_2 = -4x_2 \\ x_3 = 3x_2 \end{cases}$$

Soluzioni $= \{(-4x_2, x_2, 3x_2), \ x_2 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ 1 variabile libera $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

Base per le soluzioni:

$(-4, 1, 3)$

Poiché nel dominio ho la base B, una base per $\operatorname{Ker} f$ è: $-4(1,1,0) + (0,1,0) + 3(0,2,-1) = (-4, 3, -3)$

(4) $\det(A-\lambda I_3) =$

$$(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = -(\lambda-2)^2\lambda = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad$ e $\quad \lambda = 2$

la matrice è simmetrica, quindi sicuramente diagonalizzabile, quindi vado a trovare gli autovettori

: V_0: soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \{ (x, 0, x), \quad x \in \mathbb{R} \}$$

$$B_{V_0} = \{ (1, 0, 1) \}$$

V_2: soluzioni di $(A - 2I_3)\underline{x} = \underline{0}$

$$-x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$$

$$V_2 = \{ (-x_3, x_2, x_3), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$B_{V_2} = \{ (-1, 0, 1), \ (0, 1, 0) \}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Domande:

1) una matrice P si dice ORTOGONALE se

$$P^T = P^{-1}$$

questo accade se e solo se le righe (o le colonne) di P formano una base ortonormale

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale 2×2, e $P^{-1} = P^T$

2) se $n > m$, f non potrà essere iniettiva.

quindi, per esempio,
prendiamo
$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$$

è suriettiva ma
non iniettiva

(3) Un sistema omogeneo
non può essere
incompatibile.
Inoltre, un sistema
che ha meno equazioni

che incognite non può essere determinato $\Rightarrow$ il sistema è indeterminato qualsiasi sia il rango di A