Sottospazi di $\mathbb{R}^n$, sottospazi ortogonali

Ricordiamo la seguente proprietà del prodotto scalare: sia $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora $v \cdot v = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ e dunque $v \cdot v \geq 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ e $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$.

Definizione. Due insiemi S e T di $\mathbb{R}^n$ is dicono *ortogonali* se $v \cdot u = 0$ $\forall v \in S$ e $u \in T$.

Esempio. Siano $V = \langle(1,0,2)\rangle$ e $U = \langle(0,3,0)\rangle$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Essi sono sottospazi ortogonali fra loro: se $v \in V$, allora $v = h(1,0,2)$ per qualche $h \in \mathbb{R}$, se $u \in U$, allora $u = k(0,3,0)$ per qualche $k \in \mathbb{R}$, dunque $v \cdot u = h(1,0,2) \cdot k(0,3,0) = hk(1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0) = hk0 = 0$.

Proposizione1. Due sottospazi V ed U di $\mathbb{R}^n$ sono ortogonali se e solo se comunque presa una base di V e comunque presa una base di U, esse sono ortogonali fra loro.

Dimostrazione. Se V ed U sono ortogonali, è ovvio che le rispettive basi pure lo siano. Supponiamo viceversa che V ed U abbiano due basi ortogonali fra loro, siano esse, rispettivamente, $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ e $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$. Se $v \in V$, allora $v = h_1v_1 + h_2v_2 + \dots + h_tv_t$, analogamente, se $u \in U$, allora $u = k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_su_s$. Dunque $v \cdot u = \displaystyle\sum_{i=1,\dots,t; j=1,\dots,s} h_ik_jv_i \cdot u_j = 0$.

Proposizione2. Se due sottospazi V ed U sono ortogonali, allora $V \cap U = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione. Poichè i due sottospazi sono ortogonali, se $v \in V \cap U$, allora v è ortogonale a se stesso, ma $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$.

Corollario. Se V ed U sono ortogonali, allora l'unione di una base di V con una base di U forma una base di $V + U$.

Dimostrazione. L'asserto è vero per ogni coppia di sottospazi U e V tali che $U \cap V = \{0\}$.

Definizione. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Si dice sottospazio ortogonale di U, e si denota $U^\perp$, il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dai vettori ortogonali a tutti i vettori di U, vale a dire: $U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | v \cdot u = 0 \forall u \in U\}$.

Osservazione. Abbiamo dato per scontato che $U^\perp$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, verificare per esercizio che lo sia effettivamente.

Come trovare $U^\perp$? Sia $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $u = (a_1, a_2, \dots, u_n) \in U$, allora $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0$, cioè v deve soddisfare l'equazione definita dal vettore u. Dalla

Proposizione1, si evince che $v \in U^\perp \Leftrightarrow v \cdot u = 0$ per ogni U appartentente ad una fissata base di U. Sia $\dim U = k$ e sia $B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ una base di U. Allora $v \cdot u_i = 0 \forall\ i = 1, 2, \dots, k$ definisce un sistema con k equazioni. Poichè abbiamo preso dei vettori di una base, le k equazioni sono indipendenti, dunque $U^\perp$ è l'insieme delle soluzioni di k equazioni indipendenti in n incognite $\Rightarrow \dim U^\perp = n - k = n - \dim U$.

Osservazione. $(U^\perp)^\perp = U$.

Proposizione3. $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.

Dimostrazione Sappiamo già che $U \cap U^\perp$, in quanto spazi ortogonali fra loro, dunque $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$. Inoltre, dalla formula di Grassmann, si ha $\dim U \oplus U^\perp = \dim U + \dim U^\perp = k + n - k = n \Rightarrow U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Ora vediamo quali sono i due modi di rappresentare i sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Il primo modo è quello di indicare il sottospazio V attraverso i suoi generatori, cioè $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$. Una base di V si può estrarre allora dall'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Un secondo modo è quello di indicare V come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo: $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | Ax = \underline{0}$. Se $\rho(A) = p$, allora le variabili indipendenti risutano $n - p$ e quindi $\dim V = n - p$. Si può passare da una rappresentazione all'altra? Sappiamo come scrivere una base per l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Viceversa, se $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, come possiamo descrivere V come insieme delle soluzioni di un sistema? Supponiamo che $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ sia una base. Se V è l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = \underline{0}$, allora ogni riga di A è ortogonale ad ogni vettore di V, quindi lo spazio delle righe di A deve essere proprio $V^\perp$. Se $\dim V = k$, allora $\dim V^\perp = n - k$ e possiamo prendere come righe di A i vettori di una base di $V^\perp$.

Un altro modo più semplice per trovare un sistema lineare che ha come soluzione il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$ è il seguente. Se $\dim V = k$, cioè se i vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ formano una base, allora un sistema che ha V come insieme delle soluzioni è del tipo $A\underline{x} = \underline{0}$, con $\rho(A) = n - \dim V = n - k$, quindi possiamo prendere un sistema con $n - k$ equazioni indipendenti. Si costruisce una matrice M di ordine $(k + 1) \times n$ che ha $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ come prime k righe e $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ come ultima riga. Poichè $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ è una base, dunque un insieme indipendente, $\rho(M) \geq k$. Se $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ allora $\rho(M) = k$. Dalla condizione $\rho(M) = k$, ricaviamo $n - k$ equazioni indipendenti in $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Esempio. Sia $V = \langle (1, 2, 0, 0, 0), (1, -1, 3, 0, 0), (0, 2, 0, 1, 1) \rangle$. Verificare che i 3 generatori formano un insieme indipendente, quindi sono una base di V e $\dim V = 3$. Poichè V è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$, $\dim V^\perp = 5 - \dim V = 5 - 3 = 2$. Un vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V^\perp \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \quad x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. L'insieme delle soluzioni di tale sistema è $\{(x_4 + x_5, -\frac{x_4 + x_5}{2}, -\frac{x_4 + x_5}{2}, x_4, x_5),$

$x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$, quindi una base per $V^\perp$ è: $\{(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1)\}$. Per comodità, possiamo

prendere come base di $V^\perp$ l'insieme: $\{(2, -1, -1, 2, 0), (2, -1, -1, 0, 2)\}$. Quindi un sistema che ha V per soluzione è: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$.

Proviamo con il secondo metodo. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ e riduciamola a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \underset{\text{alla seconda riga sottraggo la prima}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{divido la seconda riga per -3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{alla terza riga sottraggo 2 volte la seconda}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{alla quarta riga sottraggo } x_1 \text{ volte la prima}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - 2x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{alla quarta riga sottraggo } x_2 - 2x_1 \text{ volte la seconda}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 + x_2 - 2x_1 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{alla quarta riga sottraggo } \frac{x_3+x_2-2x_1}{2} \text{ volte la terza}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - \frac{x_3+x_2-2x_1}{2} & x_5 - \frac{x_3+x_2-2x_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Affincè M abbia rango 3, la matrice ridotta a scalini deve avere esattamente 3 pivot, e dunque le ultime due componenti dell'ultima riga devono essere nulle, da ciò si ottiene:

$$\begin{cases} x_4 - \frac{x_3+x_2-2x_1}{2} = 0 \\ x_5 - \frac{x_3+x_2-2x_1}{2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_4 - x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \\ 2x_5 - x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio. Trovare una base e la dimensione per $V \cap U$, dove $V = \langle (1,0,2,0), (1,1,-1,2) \rangle$ e $U = \langle (3,2,-1,-1), (1,0,3,5) \rangle$.

Svolgimento. Per poter trovare la dimensione e una base di $U \cap V$, bisogna esprimere almeno uno dei due sottospazi come insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Osserviamo che, in entrambi i casi, l'insieme dei generatori è indipendente, quindi è una base. Si ha quindi:

$\dim V = \dim U = 2$. Troviamo un sistema che abbia V come insieme delle soluzioni. Ci serve un sistema con $n - \dim V = 4 - 2 = 2$ euqazioni indipendenti. Si ha $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ che ridotta a scalini diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 + 3x_2 & x_4 - 2x_2 \end{pmatrix}$.

Dunque un sistema che ha V come insieme delle soluzioni è: $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

A questo punto si può procedere in due modi.

Procedimento1. Un vettore di U si scrive come $h_1(3, 2, -1, -1) + h_2(1, 0, 3, 5) = (3h_1 + h_2, 2h_1, -h_1 + 3h_2, -h_1 + 5h_2)$. Tale vettore si trova anche in V se è soluzione del sistema trovato, quindi: $\begin{cases} -6h_1 - 2h_2 + 6h_1 - h_1 + 3h_2 = 0 \\ -4h_1 - h_1 + 5h_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -h_1 + h_2 = 0 \\ -5h_1 + 5h_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow h_1 = h_2$. Quindi $V \cap U = \{h(3, 2, -1, -1) + h(1, 0, 3, 5) = h(4, 2, 2, 4), h \in \mathbb{R}\} = \langle (4, 2, 2, 4) \rangle$. Dunque $\dim V \cap U = 1$ ed una sua base è: $\{(4, 2, 2, 4)\}$.

Procedimento2. Descriviamo anche U come soluzione di un sistema lineare omogeneo. Anche in questo caso abbiamo bisogno di due equazioni indipendenti. Si ha $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ che ridotta a scalini diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & x_3 - 3x_1 + 5x_2 & x_4 - 5x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$.

Allora un sistema che ha U come insieme delle soluzioni è: $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 + 8x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Un sistema che ha $U \cap V$ come insieme delle soluzioni è: $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 + 8x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Per trovare $\dim U \cap V$ e una sua base, bisogna allora risolvere tale sistema.