Classificazione di una conica

Una forma quadratica in x e y si puó scrivere come $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = (x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dunque $A = A^T$, cioè A è una matrice simmetrica. Affinchè la forma sia effettivamente di grado 2, a_{11}, a_{22}, a_{12} non devono essere tutti nulli, quindi la sottomatrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ deve essere diversa dalla matrice nulla. L'insieme delle soluzioni dell' equazione $(x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ viene detta *conica*. Vediamo ora di capire che tipo di conica rappresenta tale equazione mediante lo studio delle matrici A ed A_1. La matrice A_1 è simmetrica quindi ortogonalmente diagonalizzabile: esiste una matrice ortogonale P tale che $A_1 = PDP^{-1}$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che, poichè P è ortogonale, $P^{-1} = P^T$, e λ_1 e λ_2 sono i due autovalori di A_1. Sia $Q = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & P & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & P^{-1} & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & P^T & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^T$. La matrice $B = QAQ^{-1}$ rappresenta la forma quadratica nel sistema di riferimento $Ox'y'$, dove $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, poichè $(x',y',1)QAQ^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi $(x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \Leftrightarrow (x',y',1)B\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. La matrice B è simmetrica, in quanto $B = QAQ^{-1} = QAQ^T$ e $B^T = (QAQ^T)^T = QA^TQ^T = QAQ^T$, quindi $B = B^T$. Dunque possiamo scrivere $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$.

Nel nuovo sistema di riferimento abbiamo quindi l'equazione:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_3 = 0.$$

Caso 1: λ_1 **e** $\lambda_2 \neq 0$.

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x') + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y') + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x' + \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_1^2}{\lambda_1^2}) + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y' + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}) + b_3 = \lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3 =$

$\lambda_1(x'+\frac{b_1}{\lambda_1})^2+\lambda_2(y'+\frac{b_2}{\lambda_2})^2+c=0$, ove $c=-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2}+b_3$. Quindi, effettuando un nuovo cambiamento di riferimento (in questo caso una traslazione), si ha $\begin{cases} X=x'+\frac{b_1}{\lambda_1} \\ Y=y'+\frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$ e l'equazione diventa: $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+c=0$.

Caso 1a: λ_1 e $\lambda_2\neq 0$, $c=0$.

Si ha $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=0 \Leftrightarrow \lambda_1X^2=-\lambda_2Y^2$. Se λ_1 e λ_2 sono concordi, allora λ_1X^2 e $-\lambda_2Y^2$ sono discordi a meno che $X=Y=0$, quindi $(0,0)$ è l'unica soluzione dell'equazione. Se λ_1 e λ_2 sono discordi, possiamo supporre $\lambda_1>0$ e $\lambda_2<0$, dunque $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=(\sqrt{\lambda_1}X+\sqrt{-\lambda_2}Y)(\sqrt{\lambda_1}X-\sqrt{-\lambda_2}Y)=0$, quindi l'equazione rappresenta due rette. Riassumendo per $c=0$ abbiamo un punto o due rette.

Caso 1b: λ_1 e $\lambda_2\neq 0$, $c\neq 0$.

Possiamo dividere per c e otteniamo: $\frac{\lambda_1}{c}X^2+\frac{\lambda_2}{c}Y^2+1=0 \Leftrightarrow (-\frac{\lambda_1}{c})X^2+(-\frac{\lambda_2}{c})Y^2=1$.

Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e <0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2}=\frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2}=\frac{\lambda_2}{c}$ e dunque ottenere $-\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ che è un'ellisse con soli punti immaginari (cioè non ha punti in $\mathbb{R}^2$). Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e >0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2}=-\frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2}=-\frac{\lambda_2}{c}$ e dunque $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ cioè un'ellisse. Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono discordi, ad esempio $-\frac{\lambda_1}{c}>0$ e $-\frac{\lambda_2}{c}<0$, possiamo porre $-\frac{\lambda_1}{c}=\frac{1}{a^2}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}=-\frac{1}{b^2}$, quindi ottenere $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$, cioè un'iperbole.

Caso 2: uno solo degli autovalori è 0. Supponiamo $\lambda_1=0$ Si ha

$$\lambda_2y'^2+2b_1x'+2b_2y'+b_3=0.$$

Se anche $b_1=0$, otteniamo un'equazione nella sola y', quindi con nessuna, una o due soluzioni. Quindi tale equazione non ha soluzioni in $\mathbb{R}^2$ o rappresenta una o due rette. Se $b_1\neq 0$, possiamo dividere per b_1 e quindi ottenere la parabola di equazione $x'=-\frac{\lambda_2}{2b_1}y'^2-\frac{b_2}{b_1}y'-\frac{b_3}{2b_1}$.

Analogamente, se $\lambda_2=b_2=0$ ho nessuna soluzione oppure una o due rette, se $\lambda_2=0\neq b_2$, ho la parabola di equazione $y'=-\frac{\lambda_1}{2b_2}x'^2-\frac{b_1}{b_2}x'-\frac{b_3}{2b_2}$.

Caso 3: entrambi gli autovalori sono $=0$.

Se 0 è un autovalore di molteplicità algebrica 2 per A_1, vuol dire che anche la molteplicità geometrica è 2 (la matrice è diagonalizzabile, quindi la molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore). Ciò vuol dire che $A_1v=0v=\underline{0}\ \forall v\in\mathbb{R}^2$ e quindi $A_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, contraddicendo le ipotesi.

Riassumendo si ha:

- una conica degenere se λ_1 e $\lambda_2\neq 0$ e $c=-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2}+b_3=0$ oppure se $\lambda_i=b_i=0$ per un certo $i\in\{1,2\}$.
- un'ellisse se λ_1 e $\lambda_2\neq 0$ sono concordi e $c\neq 0$. Inoltre ho un'ellisse reale se c è discorde con essi, mentre ho un'ellisse con soli punti immaginari se c è concorde con gli autovalori.
- un'iperbole se λ_1 e $\lambda_2\neq 0$ sono discordi e $c\neq 0$.
- una parabola se $\lambda_1=0$ e $b_1\neq 0$ oppure $\lambda_2=0$ e $b_2\neq 0$.

Vediamo come possiamo ricavare queste informazioni dalle matrici A ed A_1. Le matrici A e B sono simili, quindi $\det A=\det B=\lambda_1\lambda_2b_3-b_1^2\lambda_2-b_2^2\lambda_1$. Inoltre, il polinomio caratteristico di A_1 è $\det A_1-\lambda I_2=\det\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\lambda^2-Tr(A_1)\lambda+\det(A_1)$. Poichè λ_1 e λ_2 sono le due radici del trinomio, si ha $Tr(A_1)=\lambda_1+\lambda_2$ e $\det(A_1)=\lambda_1\lambda_2$. Dunque osserviamo che se $\lambda_1\neq 0$ e $\lambda_2\neq 0$, $\det(A)=\lambda_1\lambda_2(b_3-\frac{b_1^2}{\lambda_1}-\frac{b_2^2}{\lambda_2})=\lambda_1\lambda_2c$, se $\lambda_1 = 0$, $\det(A) = -b_1^2\lambda_2$, infine se $\lambda_2 = 0$, $\det(A) = -b_2^2\lambda_1$. Inoltre, λ_1 e λ_2 sono concordi se e solo se $\lambda_1\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det(A_1) > 0$ e sono concordi con c se e solo se $c\lambda_1 > 0$ e $c\lambda_2 > 0$, quindi $c(\lambda_1 + \lambda_2) > 0 \Leftrightarrow \det(A)Tr(A_1) > 0$. Uno dei due autovalori è nullo se e solo se $\lambda_1\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \det(A_1) = 0$.

Quindi si ha:

- una conica degenere $\Leftrightarrow \det(A) = 0$
- un'ellisse se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) > 0$. L'ellisse è reale se $Tr(A_1)\det(A) < 0$, non ha punti reali se $Tr(A_1)\det(A) > 0$
- un'iperbole se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) < 0$.
- una parabola se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) = 0$.