

11 Settembre 2023

Svolgere la seguente prova in 2 ore e 30 minuti. Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

- a) Determinare la retta per $P = (1, 3, 0)$, perpendicolare a $r : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - z = -9 \end{cases}$ e contenuta in $\pi : 3x - y + z = 0$

b) Trovare i piani perpendicolari a $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$ e aventi distanza 2 dal punto $P = (1, -2, 3)$.

2. Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi:

- $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0, 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, -6x_1 + x_2 + x_5 = 0\}$
- $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x) = -p(x)\}$
- $W = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid Av = \mathbf{0}\}$, dove $v = (1, -1, 0)$.

3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Stabilire quale delle due è diagonalizzabile e procedere con la diagonalizzazione.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(1, 2, 1) = (1, 0, 2, 0)$ e $f(0, -1, 2) = (2, 4, 5, 1)$. Per i seguenti vettori, dire se è possibile determinare la loro immagine e in caso di risposta affermativa, calcolarla.

- $(0, 0, 0)$
- $(0, 0, 1)$
- $(1, 0, 5)$.

Domande:

- Esibire una base ortonormale di \mathbb{R}^2 che non sia la base canonica.
- Data la funzione lineare $f : V \rightarrow U$, enunciare la definizione di Imf e $Kerf$.
- Se V è il sottospazio di \mathbb{R}^4 che ha base $\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ e U ha come base $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$, si ha $V \subset U$? Giustificare la risposta.