

DETERMINANTE DI MATRICI QUADRATE

Definizioni e Proprietà

12 Novembre 2015

Pietro Pennestrì

`pennestrì.1694905@studenti.uniroma1.it`

Università di Roma Sapienza

SOMMARIO

1. Introduzione

1.1 Cenni Storici

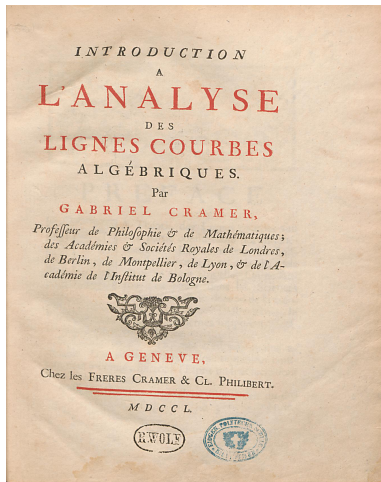
1.2 Definizione

2. Metodi di Calcolo del Determinante

3. Alcune proprietà notevoli

4. Interpretazione Geometrica di Determinante

INTRODUZIONE



- Il Determinante fu introdotto per la prima volta nel 1750 da *Gabriel Cramer* nel suo libro *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébrique*.

- Tuttavia *Leibniz*, come dimostra una lettera del 28 Aprile 1693 a *de L'Hôpital*, **era già a conoscenza** della stessa formula fornita da *Cramer* nel suo libro.

- Tuttavia *Leibniz*, come dimostra una lettera del 28 Aprile 1693 a *de L'Hôpital*, **era già a conoscenza** della stessa formula fornita da *Cramer* nel suo libro.
 - Leibniz infatti usava il determinante per verificare l'assenza di soluzioni non banali nei sistemi di equazioni lineari omogenee.

La definizione di **determinante** si può enunciare in due modi:

La definizione di **determinante** si può enunciare in due modi:

- Costruttivo.

La definizione di **determinante** si può enunciare in due modi:

- Costruttivo.
- Assiomatico.

DEFINIZIONE - MODO COSTRUTTIVO

Si definisce **determinante** la funzione $\det$ che associa **ad ogni matrice quadrata** di ordine n uno scalare reale (o complesso)

Si definisce **determinante** la funzione $\det$ che associa **ad ogni matrice quadrata** di ordine n uno scalare reale (o complesso)

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{1}$$

dove:

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) è lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a valori o nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali (o in quello complesso $\mathbb{C}$).

DEFINIZIONE - MODO COSTRUTTIVO

Data una matrice A quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

DEFINIZIONE - MODO COSTRUTTIVO

Data una matrice A quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

il suo determinante $\det(A)$ è dato dalla seguente espressione

$$\sum_{p=(j_1, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\pi(p)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (3)$$

dove:

- $S_n \forall n \in \mathbb{N}$ è l'insieme di tutte le sequenze che si possono produrre listando in tutti i modi possibili i primi n numeri interi. Ognuna di queste sequenze è definita **permutazione**.

dove:

- $S_n \forall n \in \mathbb{N}$ è l'insieme di tutte le sequenze che si possono produrre listando in tutti i modi possibili i primi n numeri interi. Ognuna di queste sequenze è definita **permutazione**.
- $\pi : S_n \rightarrow \{0, 1\}$ è la funzione parità che associa ad ogni permutazione $p = (j_1, \dots, j_n) \in S_n$ il valore 0 se la permutazione è pari o 1 se la permutazione è dispari.

Il determinante è l'**unica funzione**

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}) \end{aligned}$$

avente le seguenti proprietà ¹:

¹Tali proprietà saranno dimostrate in seguito avvalendosi della definizione costruttiva del determinante.

Il determinante è l'**unica funzione**

$$\begin{aligned}\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C})\end{aligned}$$

avente le seguenti proprietà ¹:

- $\det I = 1$ dove I è la matrice identità;
- Se su una matrice A si effettua un'operazione di **I tipo** per ottenere la matrice A' allora

$$\det A = -\det A'.$$

¹Tali proprietà saranno dimostrate in seguito avvalendosi della definizione costruttiva del determinante.

DEFINIZIONE - MODO ASSIOMATICO

- Se su una matrice A si effettua un'operazione di **II tipo** per ottenere la matrice A' allora

$$\det A = k \det A' ,$$

dove k è lo scalare **non nullo** per cui è stata moltiplicata la riga interessata dall'operazione.

DEFINIZIONE - MODO ASSIOMATICO

- Se su una matrice A si effettua un'operazione di **II tipo** per ottenere la matrice A' allora

$$\det A = k \det A' ,$$

dove k è lo scalare **non nullo** per cui è stata moltiplicata la riga interessata dall'operazione.

- Se su una matrice A si effettua un'operazione di **III tipo** per ottenere la matrice A' allora

$$\det A = \det A' .$$

METODI DI CALCOLO DEL DETERMINANTE

DETERMINANTE MATRICE DI ORDINE 2

Dalla definizione di determinante segue che:

data una matrice quadrata A di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

allora il suo determinante risulterà pari a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (5)$$

Si definisce **cofattore** o **complemento algebrico** α_{hk} dell'elemento a_{hk} di una matrice A di ordine n , il determinante della matrice A_{hk} , di ordine $n - 1$, ottenuta da A sopprimendo l' h -esima riga e la k -esima colonna e moltiplicato per $(-1)^{h+k}$, ovvero

$$\alpha_{hk} = (-1)^{h+k} \det A_{hk} \quad (6)$$

PRIMO TEOREMA DI LAPLACE

Assegnata una matrice quadrata A di ordine n il suo determinante coincide con la somma degli elementi di una riga h – esima qualsiasi o una colonna k – esima qualsiasi moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

PRIMO TEOREMA DI LAPLACE

Assegnata una matrice quadrata A di ordine n il suo determinante coincide con la somma degli elementi di una riga h – esima qualsiasi o una colonna k – esima qualsiasi moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{h1}\alpha_{h1} + a_{h2}\alpha_{h2} + \cdots + a_{hn}\alpha_{hn} \\ &= a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + \cdots + a_{nk}\alpha_{nk} \end{aligned} \quad (7)$$

Sia una matrice A quadrata di ordine n , il suo determinante è uguale al determinante della sua trasposta A^T .

Quanto affermato segue direttamente dal **primo teorema di Laplace**. Infatti, calcolare il determinante lungo una riga o una colonna è del tutto ininfluente.

SECONDO TEOREMA DI LAPLACE

Assegnata una matrice A quadrata di ordine n

È nulla la somma degli n prodotti degli elementi dell' h – esima riga per i cofattori degli elementi dell' i – esima riga.

$$a_{h1}\alpha_{i1} + a_{h2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{hn}\alpha_{in} = 0 \quad (8)$$

ALCUNE PROPRIETÀ NOTEVOLI

- Dal Primo Teorema di Laplace osserviamo che sarà **vantaggioso** calcolare il determinante di una matrice lungo **la riga o la colonna che contiene più zeri**.

- Dal Primo Teorema di Laplace osserviamo che sarà **vantaggioso** calcolare il determinante di una matrice lungo **la riga o la colonna che contiene più zeri**.
- Pertanto, il calcolo del determinante di una matrice A risulterà semplificato se consideriamo la sua forma ridotta R , pur essendo

$$\det A \neq \det R \quad (9)$$

- Dal Primo Teorema di Laplace osserviamo che sarà **vantaggioso** calcolare il determinante di una matrice lungo **la riga o la colonna che contiene più zeri**.
- Pertanto, il calcolo del determinante di una matrice A risulterà semplificato se consideriamo la sua forma ridotta R , pur essendo

$$\det A \neq \det R \quad (9)$$

Esaminiamo ora **come varia il determinante** di una matrice A se effettuiamo su quest'ultima delle operazioni elementari.

*Se su una matrice quadrata A di ordine n si effettua un'operazione di **I tipo** (scambio di righe) per ottenere la matrice A' allora*

$$\det A = -\det A' .$$

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI I TIPO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Applichiamo il primo Teorema di Laplace lungo una riga che **non è stata interessata dallo scambio**.

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI I TIPO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Applichiamo il primo Teorema di Laplace lungo una riga che **non è stata interessata dallo scambio**.
- Procediamo per induzione, sfruttando come **base** per il nostro ragionamento induttivo il caso delle matrici di ordine 2, per cui la proposizione da provare è evidente.

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI I TIPO

- Assumiamo come **ipotesi induttiva** che la proposizione sia vera per ogni matrice di ordine $m < n$.

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI I TIPO

- Assumiamo come **ipotesi induttiva** che la proposizione sia vera per ogni matrice di ordine $m < n$.
- Consideriamo una matrice B di ordine $n + 1$ e una matrice B' ottenuta da B mediante un'operazione di **I tipo** allora

$$\det B = b_{h1}\beta_{h1} + b_{h2}\beta_{h2} + \cdots + b_{hn}\beta_{hn} + b_{hn+1}\beta_{hn+1} \quad (10a)$$

$$\det B' = b_{h1}\beta'_{h1} + b_{h2}\beta'_{h2} + \cdots + b_{hn}\beta'_{hn} + b_{hn+1}\beta'_{hn+1} \quad (10b)$$

(i determinanti sono stati calcolati lungo una riga non interessata dallo scambio.)

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI I TIPO

- Assumiamo come **ipotesi induttiva** che la proposizione sia vera per ogni matrice di ordine $m < n$.
- Consideriamo una matrice B di ordine $n + 1$ e una matrice B' ottenuta da B mediante un'operazione di **I tipo** allora

$$\det B = b_{h1}\beta_{h1} + b_{h2}\beta_{h2} + \cdots + b_{hn}\beta_{hn} + b_{hn+1}\beta_{hn+1} \quad (10a)$$

$$\det B' = b_{h1}\beta'_{h1} + b_{h2}\beta'_{h2} + \cdots + b_{hn}\beta'_{hn} + b_{hn+1}\beta'_{hn+1} \quad (10b)$$

(i determinanti sono stati calcolati lungo una riga non interessata dallo scambio.)

- I cofattori $\beta'_{h1} \cdots \beta'_{hn+1}$ sono determinanti di matrici di ordine n e quindi, per l'ipotesi induttiva, hanno segno opposto rispetto a $\beta_{h1} \cdots \beta_{hn+1}$

$$\therefore \det B = -\det B' . \quad (11)$$

- Abbiamo provato che se la proposizione è vera per n allora è vera per $n + 1$.
La proposizione, visto il caso $n = 2$ (base dell'induzione), resta così verificata.

- Abbiamo provato che se la proposizione è vera per n allora è vera per $n + 1$.
La proposizione, visto il caso $n = 2$ (base dell'induzione), resta così verificata.
- **Osservazione:** Una matrice quadrata con due righe identiche ha determinante nullo.

*Se su una matrice quadrata A di ordine n si effettua un'operazione di **II tipo** (moltiplicazione di una riga per uno scalare $k \neq 0$) per ottenere la matrice A' allora*

$$\det A = k \det A' .$$

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI II TIPO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{h1} & ka_{h2} & \cdots & ka_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Sviluppiamo il determinante di A e A' lungo la riga h -esima

$$\det A = a_{h1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{hn}\alpha_{hn}$$

$$\begin{aligned} \det A' &= ka_{h1}\alpha_{h1} + \cdots + ka_{hn}\alpha_{hn} \\ &= k(a_{h1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{hn}\alpha_{hn}) \\ &= k\det A \end{aligned}$$

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI III TIPO

*Se su una matrice A si effettua un'operazione di **III tipo**
(sostituire ad una riga la stessa più un multiplo di un'altra)
per ottenere la matrice A'*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI III TIPO

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} + ka_{j1} & a_{h2} + ka_{j2} & \cdots & a_{hn} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det A = \det A'.$$

DETERMINANTE - OPERAZIONI DI III TIPO

- Sviluppiamo il determinante di A e di A' lungo la riga interessata dallo scambio dall'operazione

$$\det A = a_{h1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{hn}\alpha_{hn} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \det A' &= (a_{h1} + ka_{i1})\alpha_{h1} + \cdots + (a_{hn} + ka_{in})\alpha_{hn} \\ &= a_{h1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{hn}\alpha_{hn} + k(a_{i1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{in}\alpha_{hn}) \\ &= a_{h1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{hn}\alpha_{hn} \\ &= \det A \end{aligned} \quad (12b)$$

essendo, per il secondo Teorema di Laplace,

$$a_{i1}\alpha_{h1} + \cdots + a_{in}\alpha_{hn} = 0 \quad (13)$$

DETERMINANTE - MATRICE TRIANGOLARE

Data una matrice quadrata A di ordine n triangolare il suo determinante è pari al prodotto degli elementi sulla sua diagonale principale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} . \quad (15)$$

La proposizione può essere facilmente dimostrata ragionando per induzione:

La proposizione può essere facilmente dimostrata ragionando per induzione:

- **Base induzione:** nel caso la matrice sia di ordine $n = 2$ la verifica è evidente infatti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} .$$

DETERMINANTE - MATRICE TRIANGOLARE

- **Passo Induttivo:** assumiamo come ipotesi induttiva vera la proposizione per le matrici triangolari di ordine n .
Consideriamo la matrice triangolare A di ordine $n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

sviluppiamo il rispettivo determinante lungo la prima colonna

$$\det A = a_{11} \alpha_{11} . \quad (17)$$

- È evidente che α_{11} , cofattore dell'elemento a_{11} della matrice, a sua volta, è un determinante di una matrice di ordine n .
Quindi, per l'ipotesi induttiva, segue

$$\det A = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{n+1n+1} . \quad (18)$$

- È evidente che α_{11} , cofattore dell'elemento a_{11} della matrice, a sua volta, è un determinante di una matrice di ordine n .
Quindi, per l'ipotesi induttiva, segue

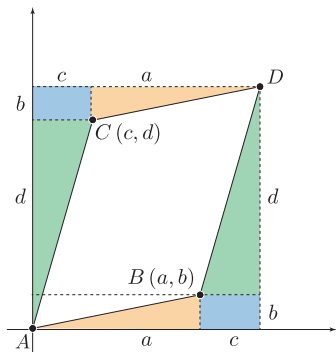
$$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22} \cdots \alpha_{n+1n+1} . \quad (18)$$

- La proposizione resta così dimostrata per induzione.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI DETERMINANTE

AREA PARALLELOGRAMMA

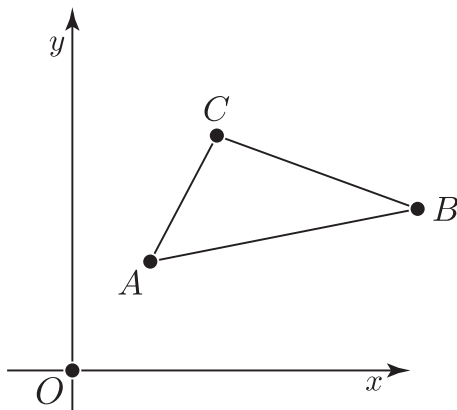
Si consideri l'area $\mathcal{A}_{ABCD}$ del parallelogramma $ABCD$ come in figura



$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} &= (a+c)(b+d) - 2bc - ab - cd \\ &= ad - bc \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\end{aligned}\tag{19}$$

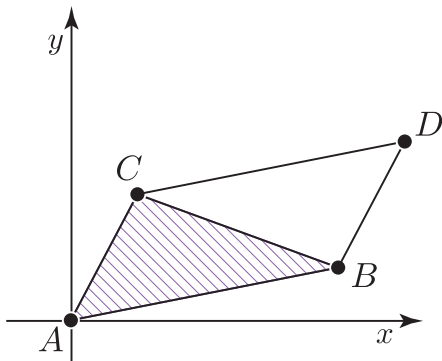
AREA TRIANGOLO

Si consideri un triangolo ABC in un sistema di riferimento $RC (Oxy)$.



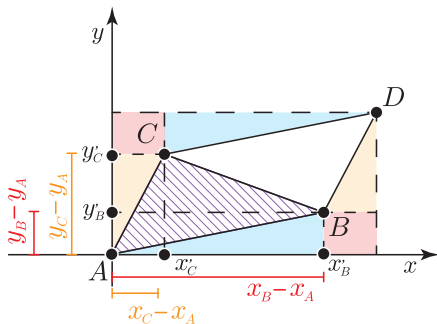
AREA TRIANGOLO

Si trasli il triangolo ABC portando A nell'origine O e si costruisca sul triangolo ABC il parallelogramma $ABCD$.



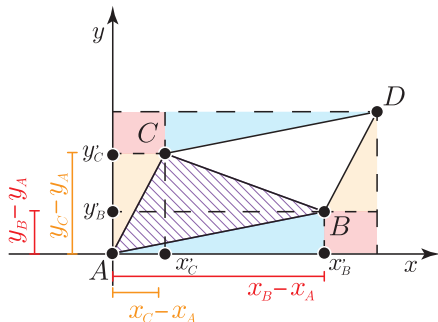
AREA TRIANGOLO

L'area $\mathcal{A}_{ABC}$ del triangolo ABC è pari alla metà di quella del parallelogramma.



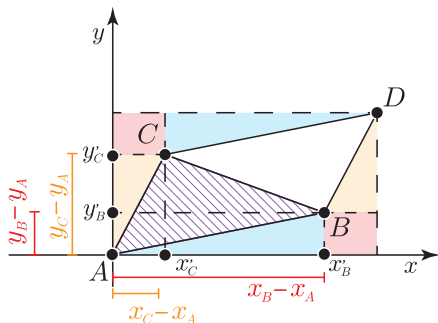
$$2\mathcal{A}_{ABC} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$$

AREA TRIANGOLO



$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

AREA TRIANGOLO



$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Si osserva che l'area è **positiva** se l'ordine dei vertici del triangolo nelle righe della matrice è quello **antiorario**.