0.1 Rango per righe e per colonne

Definizione 0.1.1. Assegnata una matrice A di ordine $m \times n$ rimangono individuati due sottospazi vettoriali $\mathcal{R}(A)$, lo spazio generato dalle righe di A, ossia $\langle R_1, R_2, \dots, R_m\rangle$ sottospazio di $M(1 \times n, \mathbb{R})$, detto *spazio delle righe di* A, e $\mathcal{C}(A)$, lo spazio generato dalle colonne di A, ossia $\langle C_1, C_2, \dots, C_n\rangle$ sottospazio di $M(m \times 1, \mathbb{R})$, detto *spazio delle colonne di* A.

Definizione 0.1.2. Si chiama *rango per righe* di una matrice A la dimensione di $\mathcal{R}(A)$, ossia il numero massimo di righe linearmente indipendenti di A. Analogamente il *rango per colonne* di A è definito come la dimensione di $\mathcal{C}(A)$, ossia il numero massimo di colonne di A linearmente indipendenti.

Lemma 0.1.3. *Se due matrici A e B, sono equivalenti per riga allora esse hanno lo stesso spazio delle righe: $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$.*

Dimostrazione. Basta verificare che operando con una operazione elementare sulle righe lo spazio generato da esse non cambia. Questo è evidente per operazioni di tipo I, perché queste cambiano solo l'ordine delle righe e ciò è irrilevante ai fini dello spazio da esse generato. È anche facile verificare che un operazione di tipo II non cambia lo spazio delle righe in quanto con essa si moltiplica una riga per uno scalare non nullo. Infine, se operiamo con una operazione di tipo III abbiamo da un lato $\mathcal{R}(A) = \langle R_1, \dots, R_m\rangle$ e dall'altro $\mathcal{R}(B) = \langle R_1, \dots, R_i + kR_j, \dots, R_m\rangle$. È facile convincersi che $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$, infatti un elemento di $\mathcal{R}(B)$ è

$$a_1R_1+\dots+a_i(R_i+kR_j)+\dots+a_mR_m = a_1R_1+\dots+a_iR_i+\cdots(a_j+a_ik)R_j+\dots+a_mR_m$$

ed è quindi anche un elemento di $\mathcal{R}(A)$. Per l'inclusione inversa basta osservare che le operazioni elementari sono invertibili e quindi anche A si ottiene da B con una operazione elementare dello stesso tipo e quindi $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$ da cui l'uguaglianza. □

Una conseguenza immediata di questo lemma è la seguente

Proposizione 0.1.4. *Il rango per righe di una matrice coincide con il rango per pivot.*

Dimostrazione. Il lemma implica che $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R)$ dove R è la forma a scala ridotta di A. Rimane solo da verificare che $dim(\mathcal{R}(R))$ è uguale al numero di pivot. Ma ciò è semplice da verificare. Supponiamo che ci siano r pivot, Le eventuali righe nulle non danno alcun contributo allo spazio generato dalle righe. Dobbiamo solo verificare che le r righe non nulle di R sono linearmente indipendenti. Ma ciò è evidente perché per definizione un pivot è l'unico coefficiente non nullo della sua colonna. □

Diamo un esempio per chiarire la dimostrazione. Le righe della forma a scala R sono del tipo

$$R_1 = (0, 1, 0, 0, 0, a, b, c), R_2 = (0, 0, 1, 0, 0, d, e, f), R_3 = (0, 0, 0, 0, 1, g, h, i)$$

prendiamo una combinazione lineare di queste e la poniamo uguale a zero

$$\alpha_1R_1 + \alpha_2R_2 + \alpha_3R_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Questa relazione si traduce in

$$(0, \alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_3, \alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 g, \alpha_1 b+\alpha_2 e+\alpha_3 h, \alpha_1 c+\alpha_2 f+\alpha_3 i) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Da cui vediamo che $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, si osservi che le ultime condizioni con i dati $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sono del tutto irrilevanti.

Osservazione 0.1.5. Abbiamo dunque visto che se due matrici sono equivalenti per righe, esse hanno lo stesso spazio delle righe, in particolare se R è la forma a scala di A allora $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R)$. Purtroppo però nell'operare sulle righe non si conserva lo spazio delle colonne e quindi, in generale, $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(R)$. Purtuttavia, la dimensione di questi due spazi, pur differenti, è la medesima come ci apprestiamo a dimostrare.

Proposizione 0.1.6. *Il rango per righe di A è uguale al suo rango per pivot.*

Dimostrazione. Sia $A = (C_1, \dots, C_n)$ la matrice A scritta per colonne. Sappiamo che la forma a scala ridotta R di A si può ottenere come prodotto $R = UA$ per una opportuna matrice invertibile U. Si ha quindi

$$UA = (UC_1, \dots, UC_n)$$

e queste sono le colonne della matrice a scala ridotta. Supponiamo di selezionare quelle r colonne che contengono i pivot e siano esse $UC_{j_1}, \dots, UC_{j_r}$. Queste formano una base dello spazio delle colonne di R, come si può verificare facilmente in maniera analoga a quanto fatto sopra per le righe. Per poter concludere occorre dimostrare ora che le colonne $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$ costituiscono una base per lo spazio $\mathcal{C}(A)$, e occorre pertanto dimostrare che esse sono linearmente indipendenti e che sono dei generatori.

Perché sono indipendenti? Prendiamo una loro combinazione lineare e la poniamo uguale a zero:

$$a_1 C_{j_1} + \dots + a_r C_{j_r} = 0$$

Vogliamo dimostrare che allora tutti i coefficienti sono nulli. Moltiplichiamo questa relazione per U ottenendo

$$U(a_1 C_{j_1} + \dots + a_r C_{j_r}) = a_1 UC_{j_1} + \dots + a_r UC_{j_r} = 0$$

ma questa è una combinazione lineare tra le colonne di R che sono linearmente indipendenti, da cui $a_1 = \dots = a_r = 0$, come richiesto.

Perché sono dei generatori? Un qualunque elemento di $\mathcal{C}(A)$ è una combinazione lineare di tutte le colonne di A, e cioè è del tipo

$$C = a_1 C_1 + \dots + a_n C_n$$

Moltiplicando ora per U si ha $UC = a_1 UC_1 + \dots + a_n UC_n$ ed è quindi un elemento di $\mathcal{C}(R)$, ma sappiamo che $UC_{j_1}, \dots, UC_{j_r}$ sono generatori dello spazio delle colonne di R e quindi $UC = a_1 UC_1 + \dots + a_n UC_n = b_1 UC_{j_1} + \cdots b_r UC_{j_r}$. Infine moltiplicando ora per U^{-1} si ottiene che $C = b_1 C_{j_1} + \cdots b_r C_{j_r}$ come desiderato. $\square$