0.1 Rango per minori

Il concetto di determinante ci può aiutare nella determinazione del rango di una matrice. Vedremo che si possono dare diverse nozioni di rango (si parla anche di *caratteristica*) di una matrice ma che esse sono tutte coincidenti. Qui vogliamo presentare il *rango per minori*.

Sia A una matrice $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Scelte s delle m righe ed s delle n colonne di A, gli elementi che giacciono agli incroci di tali righe e colonne scelte costituiscono un *minore* d'ordine s di A. A volte, per abuso di linguaggio, col termine *minore* si usa anche indicare il determinante della matrice così trovata.

Esempio 0.1.1.

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 & 11 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & 12 & 3 & 5 & -20 \\ 11 & -17 & 47 & 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo la 1^a, la 3^a e la 4^a riga, la 2^a, la 4^a e la 5^a colonna, si ottiene il seguente minore di ordine 3 (con notazione autoesplicativa):

$$M(1,3,4|2,4,5) = \begin{pmatrix} -7 & 11 & 1 \\ 12 & 5 & -20 \\ -17 & 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 0.1.2. Sia assegnata la matrice A di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alcuni minori di ordine 2 sono:

$$M(1,2|1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ M(1,3|1,3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$M(2,3|2,3) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix},\ M(1,2|2,3) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

L'unico minore principale di ordine 3 è la matrice A.

Osservazione 0.1.3. In una matrice $m \times n$ non esistono ovviamente minori d'ordine superiore al più piccolo tra i due numeri m, n.

Definizione 0.1.4. Una matrice A si dice avere *rango per minori* r se esiste almeno un suo minore d'ordine r che abbia il determinante diverso da zero (cioè un minore non nullo, per abuso di linguaggio) e se tutti i minori di ordine superiore ad r hanno determinante nullo, (cioè i minori di ordine superiore sono nulli).

Esempio 0.1.5. Sia assegnata la matrice 3×4 seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Essa possiede i seguenti 4 minori di ordine 3:

$$M(1,2,3|2,3,4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ M(1,2,3|1,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$M(1,2,3|1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},\ M(1,2,3|1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Essi hanno, come può facilmente calcolarsi, tutti determinante nullo. Poiché tra i minori di ordine 2 c'è per esempio

$$M(2,3|1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con determinante diverso da zero, il rango per minori di A è 2.

Il calcolo del rango per minori di una matrice $m \times n$ diviene notevolmente complicato con l'aumentare di m, n: in una matrice 6×5, per esempio, esistono:

1. 6 minori di ordine 5: i minori di ordine 5 si ottengono scegliendo tutte le 5 colonne disponibili e 5 su 6 righe in tutti i modi possibili. Il calcolo combinatorio ci dice che questo si può fare in $\binom{5}{5}\binom{6}{5} = 6$

2. 75 minori di ordine 4: i minori di ordine 5 si ottengono scegliendo 4 sulle 5 colonne disponibili e 4 su 6 righe in tutti i modi possibili. Questo si può fare in $\binom{5}{4}\binom{6}{4} = 5 \cdot 15 = 75$

3. 200 minori di ordine 3: essi si ottengono scegliendo 3 sulle 5 colonne e 3 sulle 6 righe disponibili: $\binom{5}{3}\binom{6}{3} = 10 \cdot 20 = 200$

4. 150 minori di ordine 2: $\binom{5}{2}\binom{6}{2} = 10 \cdot 15 = 150$

5. 30 minori di ordine 1: $\binom{5}{1}\binom{6}{1} = 5 \cdot 6 = 30$

Esiste tuttavia un accorgimento, che permette di semplificare notevolmente la ricerca del rango per minori di una matrice A. Esso è il seguente: trovato un minore V d'ordine s di A a determinante non nullo, per vedere se esistono o meno minori a determinante non nullo d'ordine $s+1$, è sufficiente esaminare tutti quelli che si ottengono "orlando" V con gli elementi di una riga e di una colonna fra quelle di A che non compaiono già in V, vale a dire prendendo un minore che si ottiene con la stessa scelta di righe e colonne con l'aggiunta di una sola riga e colonna ulteriore.

Alla luce di questo procedimento, l'Esempio 0.1.5 può essere più facilmente risolto come segue: osservato che il minore di ordine 2

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, per decidere se il rango per minori di A è 2 o arriva a 3 basta esaminare il determinante dei due minori (invece dei quattro precedenti)

$$M(1,2,3|1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \ M(1,2,3|1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

che sono gli unici ottenuti "orlando" V in tutti i modi possibili. Poiché tali determinanti sono nulli, il rango per minori è appunto 2.

Il fatto che questo procedimento è valido costituisce il contenuto del cosiddetto *Teorema degli orlati* che non dimostreremo.