

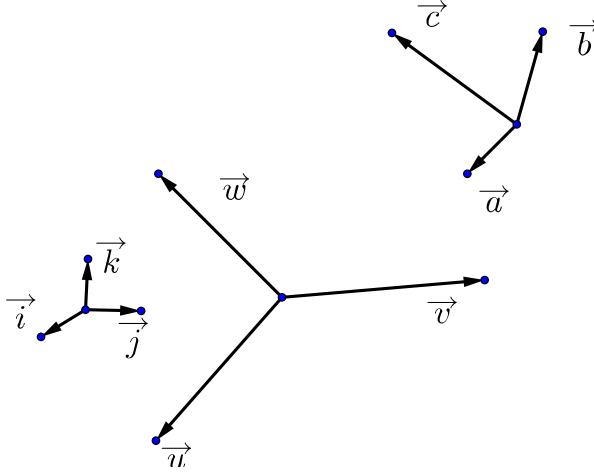
0.1 Prodotto vettoriale

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 0.1.1. Assegnati tre vettori liberi $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, $\vec{v}' = v'_x \vec{i} + v'_y \vec{j} + v'_z \vec{k}$, $\vec{v}'' = v''_x \vec{i} + v''_y \vec{j} + v''_z \vec{k}$, la terna ordinata $(\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'')$ si dice *equiversa* alla terna ordinata dei versori degli assi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se:

$$\begin{vmatrix} v_x & v'_x & v''_x \\ v_y & v'_y & v''_y \\ v_z & v'_z & v''_z \end{vmatrix} > 0.$$

Osservazione 0.1.2. La precedente definizione serve a distinguere le due possibili orientazioni dello spazio tridimensionale. Ad esempio, in applicazioni fisiche occorre spesso distinguere un sistema di riferimento destro o sinistro a seconda che la terna di versori scelta $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sia equiversa con la terna ottenuta prendendo come vettori ordinatamente l'indice, il medio e il pollice della mano destra oppure della mano sinistra. Nella figura sottostante la terna ordinata $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è quella che si prende per convenzione e dà un riferimento destro. Le altre due terne di vettori disegnate sono equiverse o, si dice, *contraverse* con la terna di riferimento $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a seconda dell'ordine in cui sono prese. Per esempio, la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è equiversa, mentre $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ è contraversa. Si osservi infatti che nello scambiare due vettori di posto, nella corrispondente matrice delle componenti si sono scambiate due colonne e pertanto il determinante ha cambiato segno. Analogamente, la terna $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ è equiversa con quella fondamentale mentre la terna $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$ è contraversa. Detto in altra maniera, supponiamo che un osservatore sia in piedi sul piano individuato dai vettori $\vec{i}, \vec{j}$. La più piccola rotazione possibile per portare $\vec{i}$ a sovrapporsi a $\vec{j}$ appare in senso antiorario ad un osservatore collocato in piedi in modo che il verso di $\vec{k}$ sia quello che va dai piedi alla testa dell'osservatore. Analogamente, se l'osservatore è in piedi sul piano di $\vec{u}, \vec{v}$ dalla parte del vettore $\vec{w}$ egli vede il vettore $\vec{u}$ sovrapporsi al vettore $\vec{v}$ in senso antiorario. Invece, ad esempio, se l'osservatore è in piedi nella direzione di $\vec{b}$ egli vede sovrapporsi $\vec{c}$ a $\vec{a}$ in senso antiorario e dunque la terna $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ è equiversa alla terna fondamentale.



Definiamo una nuova operazione nell'insieme V_3 dei vettori liberi dello spazio.

Definizione 0.1.3. Assegnati due vettori liberi $\vec{v}$, $\vec{v}'$, definiamo *prodotto vettoriale* di $\vec{v}$ per $\vec{v}'$ e lo indichiamo con $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ il vettore:

di modulo $|\vec{v}| |\vec{v}'| \sin \widehat{\vec{v} \vec{v}'}$,

di direzione perpendicolare ad entrambi $\vec{v}$, $\vec{v}'$,

di verso tale che la terna ordinata $(\vec{v}, \vec{v}', \vec{v} \wedge \vec{v}')$ sia equiversa a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Osservazione 0.1.4. Dalla trigonometria sappiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ è l'area del parallelogramma costruito mediante $\vec{v}$ e $\vec{v}'$. Si ricordi la formula dell'area di un triangolo.

Il prodotto vettoriale soddisfa le seguenti proprietà, $\forall k \in \mathbf{R}, \forall \vec{v}, \vec{v}', \vec{w} \in V_3$:

- 1) $\vec{v} \wedge \vec{v}' = -\vec{v}' \wedge \vec{v}$ (proprietà anticommutativa)
- 2) $(k\vec{v}) \wedge \vec{v}' = \vec{v} \wedge (k\vec{v}') = k(\vec{v} \wedge \vec{v}')$
(proprietà associativa con la moltiplicazione per gli scalari)
- 3) $(\vec{v} + \vec{v}') \wedge \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v}' \wedge \vec{w})$
 $\vec{w} \wedge (\vec{v} + \vec{v}') = (\vec{w} \wedge \vec{v}) + (\vec{w} \wedge \vec{v}')$
(proprietà distributive rispetto alla somma vettoriale)

Dalla definizione segue inoltre immediatamente la seguente proposizione:

Proposizione 0.1.5. Il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ è eguale al vettore nullo se e solo se i vettori $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sono paralleli (includendo nel parallelismo il caso in cui uno dei due vettori sia nullo).

Osserviamo che il prodotto vettoriale dei due versori $\vec{i}, \vec{j}$, dell'asse x e rispettivamente dell'asse y , dà un vettore di modulo $|\vec{i}| |\vec{j}| \sin \pi/2 = 1$, cioè un versore, di direzione perpendicolare al piano xy , cioè parallela a $\vec{k}$, di verso tale che la terna ordinata $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j})$ sia equiversa a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ne discende ovviamente che $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. Forniamo di seguito la tabella dei prodotti vettoriali dei versori degli assi:

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}, \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}, \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}, \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}. \end{aligned}$$

0.1.6.

Osservazione 0.1.7. Il prodotto vettoriale non è associativo (non inganni la proprietà 2 che riguarda un'associatività con gli scalari), cioè non vale in generale l'eguaglianza $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$. Per convincersene, basta considerare il seguente controesempio:

$$\begin{aligned} (\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} &= \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}, \\ \vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) &= \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}. \end{aligned}$$

Determiniamo adesso le coordinate del prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ in funzione delle coordinate dei due vettori.

Proposizione 0.1.8. *Assegnati i vettori $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, $\vec{v}' = v'_x \vec{i} + v'_y \vec{j} + v'_z \vec{k}$, risulta:*

$$\vec{v} \wedge \vec{v}' = (v_y v'_z - v_z v'_y) \vec{i} + (v_z v'_x - v_x v'_z) \vec{j} + (v_x v'_y - v_y v'_x) \vec{k}.$$

Dimostrazione Dalle proprietà del prodotto vettoriale discende:

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{v}' &= (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \wedge (v'_x \vec{i} + v'_y \vec{j} + v'_z \vec{k}) = \\ &= v_x v'_x \vec{i} \wedge \vec{i} + v_x v'_y \vec{i} \wedge \vec{j} + v_x v'_z \vec{i} \wedge \vec{k} + \\ &\quad v_y v'_x \vec{j} \wedge \vec{i} + v_y v'_y \vec{j} \wedge \vec{j} + v_y v'_z \vec{j} \wedge \vec{k} + \\ &\quad v_z v'_x \vec{k} \wedge \vec{i} + v_z v'_y \vec{k} \wedge \vec{j} + v_z v'_z \vec{k} \wedge \vec{k} = \\ &= (v_y v'_z - v_z v'_y) \vec{i} + (v_z v'_x - v_x v'_z) \vec{j} + (v_x v'_y - v_y v'_x) \vec{k}. \quad \square \end{aligned}$$

Si osservi che la formula della Proposizione 0.1.8 può essere riscritta anche:

$$\vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix}$$

0.1.9.

dove si pensi di sviluppare il secondo membro come un ordinario determinante.

0.2 Prodotto misto

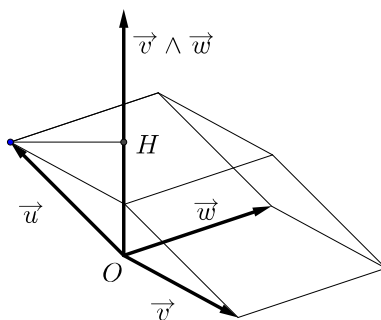
Definizione 0.2.1. Data una terna ordinata di vettori $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ si dice *prodotto misto* di essi il numero reale $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Se si suppone assegnata un riferimento ortogonale e dunque una orientazione dello spazio si ha la seguente formula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

Infatti sviluppando questo determinante con la regola di Laplace lungo la prima riga si ha precisamente il prodotto scalare di $(u_x, u_y, u_z)^T$ con il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

È immediato dunque che tre vettori sono linearmente dipendenti se e solo se il loro prodotto misto vale zero. Se invece essi sono indipendenti il determinante ha valore non nullo ed è positivo o negativo precisamente se la terna ordinata è equiversa o contraversa con la terna fissata fondamentale della base ortonormale dello spazio. Vediamo ora il significato geometrico del valore assoluto del prodotto misto. Consideriamo la seguente figura



Il volume del parallelepipedo è uguale all'area della base per l'altezza. Ora, la base è il parallelogramma costruito sui vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e quindi la sua area è uguale al modulo del prodotto vettoriale $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$. L'altezza invece eguaglia la lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $\vec{u}$ sul vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Ricordando la formula per la proiezione ortogonale, abbiamo che la lunghezza cercata è il modulo di

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2} \vec{v} \wedge \vec{w} \quad (2)$$

In definitiva, il volume del parallelepipedo è

$$\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2} \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \right) \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = |\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}| \quad (3)$$

ossia proprio il modulo del prodotto misto, come richiesto.