0.1 Forme quadratiche

In questa sezione possiamo applicare il Teorema degli Assi Principali per giustificare alcune fatti che sono stati utilizzati nella riduzione a forma canonica di una conica. In quei casi infatti avevamo osservato che l'equazione della conica assume una forma particolarmente semplice nel caso in cui si prendano gli assi principali della conica come assi di un nuovo sistema di riferimento e di conseguenza diventava importante andare a considerare la matrice della parte quadratica della conica. Questo motiva la definizione seguente.

Definizione 0.1.1. Si definisce *forma quadratica* un qualunque polinomio omogeneo di secondo grado, cioè in cui tutti i termini sono di grado 2..

Le forme quadratiche svolgono inoltre un ruolo importante nella determinazione di massimi e minimi di funzioni di più variabili.

Esempi 0.1.2. Il polinomio $q_1 = x^2+3xy-6y^2$ è una forma quadratica in due variabili, mentre $q_2 = x_1x_2+x_3^2$ è una forma quadratica in tre variabili. Il polinomio x^2+y^2-2x non è omogeneo e dunque non è una forma quadratica. Ogni forma quadratica può essere scritta utilizzando una matrice. Per esempio

$$q_1 = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e

$$q_2 = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sono forme quadratiche, come il lettore è invitato a verificare. Viceversa, data una matrice di ordine n essa individua una forma quadratica in n variabili:

$$q = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

In generale, dunque, una forma quadratica è della forma $q = X^TAX$. Nel seguito supporremo che A sia simmetrica e diremo che A è la matrice associata alla forma. Nel caso di una forma quadratica in due variabili $q(x, y)$ il grafico di $z = q(x, y)$ è una superficie nello spazio tridimensionale. Sappiamo, ad esempio, che il grafico di $z = 3x^2 + 2y^2$ è un paraboloide ellittico "rivolto verso l'alto", $z = -3x^2 - 2y^2$ è un paraboloide ellittico "rivolto verso il basso", $z = 3x^2-2y^2$ è un paraboloide iperbolico, infine $z = 3y^2$ che è una quadrica degenere (cilindro). Ciò che rende relativamente facile visualizzare queste superfici è il fatto che esse sono in posizione canonica, ossia che l'equazione non ha termini misti in xy. Ciò corrisponde al fatto che la matrice associata è diagonale. Per esempio, $3x^2 - 2y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Il Teorema degli Assi Principali garantisce che esiste una matrice ortogonale P in modo che $P^TAP = D$ con D matrice diagonale. Se allora effettuiamo un cambio di variabili ponendo

$$X = PY$$

abbiamo

$$q = X^T AX = (PY)^T A(PY) = Y^T (P^T AP)Y = Y^T DY = \lambda_1 y_1 + \lambda_n y_2 + \cdots + \lambda_n y_n$$

diremo allora che abbiamo diagonalizzato la forma quadratica. Questo è proprio ciò che avviene nella riduzione a forma canonica delle coniche e delle quadriche.

Definizione 0.1.3. Una forma quadratica si dice

- *definita positiva* se $q(X) > 0$ per ogni $X \neq 0$,
- *definita negativa* se $q(X) < 0$ per ogni $X \neq 0$,
- *semidefinita positiva* se $q(X) \geq 0$ per ogni $X \neq 0$,
- *semidefinita negativa* se $q(X) \leq 0$ per ogni $X \neq 0$,
- *indefinita* altrimenti.

Una matrice simmetrica A si dice *definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa, indefinita* se la forma quadratica associata ha la proprietà corrispondente.

Come conseguenza del Teorema degli Assi Principali abbiamo la seguente caratterizzazione delle forme quadratiche definite positive:

Teorema 0.1.4. *Se A è una matrice simmetrica allora la forma quadratica $q = X^T AX$ è*

- *definita positiva se e solo se ogni autovalore di A è strettamente positivo (non può essere zero);*
- *semidefinita positiva se e solo se ogni autovalore di A è non negativo ed almeno uno è zero;*
- *definita negativa se e solo se ogni autovalore di A è strettamente negativo (non può essere zero);*
- *semidefinita negativa se e solo se ogni autovalore di A è non positivo ed almeno uno è zero;*
- *indefinita se A possiede autovalori sia positivi che negativi.*

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto del teorema. Gli altri punti si dimostrano analogamente. Se A è simmetrica allora per il Teorema

$$q(X) = X^T AX = (PY)^T A(PY) = Y^T (P^T AP)Y = Y^T DY = \lambda_1 y_1 + \lambda_n y_2 + \cdots + \lambda_n y_n$$

Se ogni autovalore è positivo allora da questa segue che $q(X) > 0$ e la forma è definita positiva. Viceversa, se $q(X) > 0$ per ogni $X \neq 0$ prendiamo la j-esima colonna X_j di P ed osserviamo che essa uguaglia PE_j dove E_j è la j-esima colonna di I_n. Abbiamo quindi

$$q(X_j) = X_j^T AX_j = (PE_j)^T A(PE_j) = E_j^T (P^T AP)E_j = E_j^T DE_j = \lambda_j$$

ed essendo $q(X_j) > 0$ deve essere $\lambda_j > 0$. $\square$

Esempio 0.1.5. Effettuare un cambiamento di varibili per eliminare il termine misto nella forma quadratica $q(x,y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $x^2 - 7x - 6 = (x-1)(x-6)$. Autovettori corrispondenti sono $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Normalizzati sono: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice P è allora

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $P^T AP = D$ dove $D = diag(1, 6)$. Posto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora

$$X^T AX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 + 6y'^2$$

Si osservi che la matrice A è definita positiva. Si poteva anche osservare che, utilizzando la tecnica del completamento del quadrato,

$$q(x,y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 5(x^2 + \frac{4}{5}xy) + 2y^2$$

$$= 5 \left(x^2 + \frac{4}{5}xy + \left(\frac{2}{5}\right)^2 y^2 \right) + 2y^2 - 5 \left(\frac{2}{5}\right)^2 y^2 = 5 \left(x + \frac{2}{5}y \right)^2 + (2 - \frac{4}{5})y^2$$

Questa espressione polinomiale, essendo somma di due quadrati è chiaramente positiva per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Osserviamo che questo dipende dal fatto che il coefficiente

$$2 - \frac{4}{5} > 0$$

ed è interessante che questo coefficiente altro non è che $\frac{10-4}{5} = \frac{\det A}{a_{11}}$, si confronti col Teorema 0.1.7.

Corollario 0.1.6. *Ogni matrice definita positiva è invertibile.*

Dimostrazione. Infatti il determinante è il prodotto degli autovalori che sono tutti positivi. □

Calcolare gli autovalori di una matrice non è sempre agevole. Risulta quindi molto utile il seguente criterio necessario e sufficiente per la positività, di cui omettiamo la dimostrazione. Ricordando la definizione di minori principali, possiamo enunciare

Teorema 0.1.7. *Sia A una matrice simmetrica di ordine n e siano $A_n = A, A_r = A(1, 2, \ldots, r), r = 1, \ldots, n-1$ le sottomatrici di A ottenute cancellando le ultime $n-r$ righe e colonne.*

- *A è definita positiva se e solo se il* $\det A_r > 0, r = 1, \ldots n$*,*
- *A è definita negativa se e solo se* $(-1)^r \det A_r > 0, r = 1, \ldots n$*.*

Per la semipositività è necessario considerare tutti i minori principali e non solo quelli particolari del teorema precedente:

Teorema 0.1.8. *Sia A una matrice simmetrica di ordine n*

- *A è semidefinita positiva se e solo se ogni minore principale ha determinante non negativo;*
- *A è semidefinita negativa se e solo se i determinanti principali di ordine pari sono non negativi e quelli di ordine dispari sono non positivi.*

Esempio 0.1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 23 \quad \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 21$$

e infine cancellando le ultime due righe e due colonne si ottiene la matrice di ordine 1, e cioè il coefficiente di posto $(1, 1)$ che è 10. Essendo tutti positivi possiamo dire che la matrice A è definita positiva.

Esempio 0.1.10. Determinare se la seguente matrice è definita, semidefinita o indefinita.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 8 & 11 & -2 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si calcola che $\det A = -1458$. Inoltre, i minori principali di ordine 1 sono gli elementi sulla diagonale principale e sono evidentemente tutti positivi. I determinanti dei minori principali di ordine 2 sono:

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -90 \leq 0, \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = -9 \leq 0, \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 18 \geq 0$$

In conclusione, la matrice è indefinita.

Esempio 0.1.11. Determinare se la seguente matrice è definita, semidefinita o indefinita.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Si calcola che $\det A = 0$. Inoltre, i minori principali di ordine 1 sono gli elementi sulla diagonale principale e sono evidentemente tutti positivi. I determinanti dei minori principali di ordine 2 sono:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{6} & -1 \\ -1 & \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{vmatrix} = 8, \begin{vmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{vmatrix} = 4$$

In conclusione, la matrice è semidefinita positiva.