0.1 Esercizio 3

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare la sua forma a scala ridotta R. Quanti pivot troviamo?
2. Calcolare il suo rango per minori.
3. Determinare una base per $\mathcal{R}(A)$.
4. Determinare una base per $\mathcal{C}(A)$.
5. Sfruttare quanto appreso sul rango di una matrice per determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$(1, 2, 3, 1), (2, 1, 0, 5), (-2, 0, 1, -5), (4, 3, -2, 13), (1, 1, 1, 2).$$

Soluzione.

1. La forma a scala ridotta della matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dunque il rango per pivot è 2.

2. Osserviamo che il determinante del minore $M(1,2|1,2)$ è non nullo. Per il teorema degli orlati basta controllare i minori $M(1,2,3|1,2,3)$ e $M(1,2,3|1,2,4)$ che sono entrambi nulli. Quindi il rango per minori è 2.

3. Sappiamo che $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R)$ e quindi una base di $\mathcal{R}(A)$ è data da

$$\{(1, 0, \frac{3}{2}, 2), (0, 1, \frac{3}{2}, 0)\}$$

4. Sappiamo che $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(R)$, basta però prendere le colonne di A corrispondenti ai pivot. Quindi

$$\{(1, 0, 2)^T, (-1, 2, -4)^T\}$$

   Osservazione: si sarebbe potuto operare sulle righe della matrice trasposta di A che è come operare con operazioni elementari sulle colonne di A, e poi reinterpretare il risultato.

5. Conviene prendere una matrice che ha i vettori assegnati come righe ed operare con l'algoritmo di Gauss. Si trova che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha forma scala ridotta

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base è dunque

$$\{(1,0,0,2),(0,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$$

Osservazione. Si può dimostrare che il numero di operazioni necessarie a calcolare un determinante di ordine n in modo efficiente sia $(n-1)n!$ mentre sono necessarie $\frac{n^3}{3}$ operazioni per svolgere l'algoritmo di Gauss su una matrice di ordine n.

Se $n = 8$ nel primo caso abbiamo quindi bisogno di 7(8!) =282240 operazioni, nel secondo caso di circa 171 operazioni. Svolgendo una operazione al secondo nel primo caso occorrono 282240 secondi cioè circa tre giorni di lavoro ininterrotto. Nel secondo caso ce la caviamo con 171 secondi: circa 3 minuti.

Pensando di usare un calcolatore: nel 2013 il più veloce supercomputer può svolgere $33,86 \times 10^{15}$ operazioni al secondo e dunque in entrambi i casi precedenti la soluzione sarebbe pressoché istantanea.

Scriviamo una tabella di risultati che danno i tempi di svolgimento di calcolo di un determinante di ordine n usando la definizione e usando l'algoritmo di Gauss.

n	Determinante	Gauss
8	$8,3 \times 10^{-12}$ secondi	$5,0 \times 10^{-15}$ secondi
20	1364 secondi = 22 minuti	$7,8 \times 10^{-14}$ secondi
30	$2,2 \times 10^{17}$ sec= 7 miliardi di anni	$2,6 \times 10^{-13}$ secondi
100	3×10^{157} vite dell'universo	$9,8 \times 10^{-12}$ secondi