1 Esercizio 14 pag 97

Nota: Nel testo dell'esercizio al posto del termine noto 18 ci dovrebbe essere 20 e quindi anche l'elemento di posto $(1,1)$ della matrice della conica deve essere 20 e non 18. Il valore del determinante della matrice della conica, e cioè l'invariante cubico, è comunque uguale a -100. Infatti nel calcolo del determinante, il complemento algebrico di quel coefficiente è zero, trattandosi di una parabola. Il resto del calcolo è quindi giusto. Qui di seguito è l'esercizio corretto.

Determinare l'equazione canonica di $\mathcal{C}$: $x^2+6xy+9y^2-6x+2y+20=0$.

Metodo del cambiamento di riferimento

La matrice della conica è $\begin{pmatrix} 20 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Il suo determinante vale $-100 \neq 0$: conica generale. Inoltre α_{00} vale $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$: $\mathcal{C}$ è una parabola, come si poteva riconoscere scrivendola nella forma $(x+3y)^2-6x+2y+20=0$, che ci permette anche di riconoscere i coefficienti 1 e 3 necessari per la determinazione dell'asse r di $\mathcal{C}$. Essendo $f_x = 2x+6y-6$, $f_y = 6x+18y+2$, l'equazione dell'asse è $1(2x+6y-6)+3(6x+18y+2)=0$, ovvero $x+3y=0$.

Il vertice V, punto di incontro dell'asse r con $\mathcal{C}$, si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+6xy+9y^2-6x+2y+20=0 \end{cases}$, da cui $V=(3,-1)$.

La perpendicolare a r passante per V è $3(x-3)-(y+1)=0$, cioè $3x-y-10=0$. Tale retta deve diventare l'asse X del nuovo riferimento, cioè $Y=0$, mentre l'asse r avrà equazione $X=0$. Tenendo conto del fattore di normalizzazione che, per entrambe le rette è $\frac{1}{\sqrt{10}}$, abbiamo le formule:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x-y-10) \end{cases}$$

con le inverse

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}X + \frac{3}{\sqrt{10}}Y + 3 \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}X - \frac{1}{\sqrt{10}}Y - 1 \end{cases}$$

Sostituendo queste ultime nell'equazione di $\mathcal{C}$: $(\frac{1}{\sqrt{10}}X+\frac{3}{\sqrt{10}}Y+3)^2+\cdots$, si ottiene l'equazione canonica $Y = \frac{\sqrt{10}}{2}X^2$.

Metodo degli invarianti

Ricordiamo che, utilizzando gli invarianti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$, l'equazione canonica di una parabola si ottiene semplicemente mediante la formula $Y = \sqrt{-\frac{\mathcal{I}^3}{4\mathcal{A}}}X^2$. Nel nostro caso, essendo $\mathcal{A}=-100$, $\mathcal{I}=10$, si ha $Y=\frac{\sqrt{10}}{2}X^2$.

2 Esercizio 11 pag 84

Determinare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $P_0(1,1)$ e raggio $12\sqrt{2}$. Determinare inoltre i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con il diametro parallelo a $x-y+2=0$.

Soluzione

La circonferenza ha equazione cartesiana $(x-1)^2+(y-1)^2 = 288$, ovvero $x^2+y^2-2x-2y-286 = 0$. Il diametro in esame è la retta per P_0 parallela a $x-y-2 = 0$, cioè la retta $x-y = 0$. Il sistema $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-286 = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$ dà luogo all'equazione $x^2-2x-143 = 0$, con soluzioni $x = 13$ e $x = -11$. I punti richiesti sono pertanto $(13, 13)$, $(-11, -11)$.