0.1 Diagonalizzazione ortogonale

Nello studio della diagonalizzazione di matrici, abbiamo visto che una matrice A è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori per A. In uno spazio euclideo si rivela utile a volte disporre di una base ortonormale. Possiamo dunque domandarci se sia possibile ottenere una base ortonormale di autovettori. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt ad una base di autovettori non è di aiuto perché i vettori così ottenuti cessano, in generale, di essere autovettori. Il risultato che dimostreremo è che solo per alcune matrici si può ottenere una base ortonormale di autovettori, precisamente nel caso delle matrici simmetriche.

Prima di enunciare e dimostrare questo risultato, occorre ricordare il concetto di matrice ortogonale:

Definizione 0.1.1. Una matrice quadrata P si dice *ortogonale* se $P^T = P^{-1}$.

Teorema 0.1.2. *Le seguenti condizioni per una matrice quadrata di ordine n sono equivalenti*

(1) *P è ortogonale;*

(2) *Le colonne di P sono un sistema ortonormale;*

(3) *Le righe di P sono un sistema ortonormale.*

Dimostrazione. Se P è ortogonale allora $PP^T = I$. Siano $r_1, \ldots, r_n$ le righe di P. L'elemento di posto (i, j) della matrice prodotto PP^T è il prodotto scalare dell'i-esima riga di P per la j-esima colonna di P^T, che non è altro che la j-esima riga di P trasposta. Nel calcolare PP^T stiamo dunque eseguendo il prodotto scalare delle righe di P per se stesse. La condizione $PP^T = I$ equivale dunque ad affermare che il prodotto scalare $r_i \cdot r_i = 1$, mentre $r_i \cdot r_j = 0$ se $i \neq j$, cioè le righe formano un sistema ortonormale. Un analogo ragionamento può essere fatto per le colonne di P, osservando che $P^T P = I$. □

Definizione 0.1.3. Una matrice quadrata A si dice *ortogonalmente diagonalizzabile* se esiste una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP = P^T AP = D$, dove D è una matrice diagonale.

Ci occorreranno anche alcune importanti proprietà delle matrici simmetriche:

Lemma 0.1.4. *Assegnati $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e A matrice simmetrica, sia $(x_1, \ldots, x_n)^T$ la colonna delle coordinate di $\mathbf{v}$ e $(y_1, \ldots, y_n)^T$ la colonna delle coordinate di $\mathbf{u}$. Allora $\mathbf{v} \cdot A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.*

Dimostrazione. Si ha: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$, dove l'ultima espressione è il prodotto di matrici. Abbiamo dunque:

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (A\mathbf{v})^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T A\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{u},$$

avendo sfruttato la simmetria di A. □

Proposizione 0.1.5. *Se A è una matrice simmetrica reale di ordine n, allora tutti i suoi n autovalori sono reali. Inoltre, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono due autovettori di A relativi a due autovalori distinti allora essi sono perpendicolari.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}$ un autovettore, eventualmente complesso, di A: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Vogliamo dimostrare che λ è in effetti reale e lo dimostreremo sfruttando il fatto che un numero complesso λ è reale se e solo se esso coincide col suo complesso coniugato: $\bar{\lambda} = \lambda$. Sia dunque $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ un autovettore relativo a λ e sia $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, \bar{x_n})^T$ il suo coniugato. Allora il prodotto $(\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = x_1\bar{x_1} + \cdots + x_n\bar{x_n} = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ è sicuramente un numero reale positivo.

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = (\lambda\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}) &= (A\mathbf{v}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \text{ perché } \mathbf{v} \text{ è un autovettore} \\
&= \mathbf{v} \cdot A\bar{\mathbf{v}} \text{ per il Lemma 0.1.4} \\
&= \mathbf{v} \cdot (\bar{A}\bar{\mathbf{v}}) \text{ perché } A \text{ è reale} \\
&= \mathbf{v} \cdot \overline{(A\mathbf{v})} \text{ per le proprietà del coniugio} \qquad (1) \\
&= \mathbf{v} \cdot \overline{(\lambda X)} \text{ perché } X \text{ è un autovettore} \\
&= \mathbf{v} \cdot (\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}) \text{ per le proprietà del coniugio} \\
&= \bar{\lambda}(\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \text{ per la proprietà associativa}
\end{aligned}$$

Ora osserviamo, il primo e l'ultimo membro di questa catena di uguaglianze:

$$\lambda(\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\lambda}(\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}})$$

Essendo $(\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}})$ un numero reale positivo, la relazione si può semplificare ottenendo $\lambda = \bar{\lambda}$ come richiesto.

Verifichiamo ora la seconda affermazione dell'enunciato. Assumiamo che $\mathbf{v}$ sia un autovettore relativo all'autovalore λ_1 e che $\mathbf{u}$ sia un autovettore relativo all'autovalore λ_2, allora dal Lemma 0.1.4 segue:

$$(\lambda_1\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\lambda_2\mathbf{u}) = \lambda_2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}).$$

Di conseguenza allora

$$\lambda_1(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \lambda_2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$$

da cui

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Essendo per ipotesi $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, si ha necessariamente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$. □

Proposizione 0.1.6. *Una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se esiste una base ortonormale composta di autovettori.*

Dimostrazione. Ciò segue dal fatto che se A è ortogonalmente diagonalizzabile allora intanto è diagonalizzabile e quindi le colonne di P sono autovettori e inoltre P è ortogonale e dunque le colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

□

Il seguente importante teorema risponde in maniera completa alla domanda posta all'inizio di questa sezione. La risposta, come vedremo è che si può avere una base che sia allo stesso tempo ortonormale e composta da autovettori precisamente nel caso in cui si abbia una matrice simmetrica.

Teorema 0.1.7. (Teorema degli Assi Principali) *Sia A una matrice reale di ordine n allora A è simmetrica se e solo se A è ortogonalmente diagonalizzabile.*

Dimostrazione. La parte più consistente della dimostrazione è far vedere che se A è simmetrica allora essa è ortogonalmente diagonalizzabile. Procediamo per induzione sull'ordine n della matrice. Se $n = 1$ il risultato è banalmente vero: ogni matrice di ordine 1 è simmetrica, è anche diagonale e ogni vettore di $\mathbb{R}$ è un autovettore per essa.

Supponiamo che l'enunciato sia vero per per ogni matrice di ordine $< n$ e consideriamo una matrice A simmetrica di ordine n. Sia $\mathbf{v}_1$ un autovettore per essa di autovalore (reale) λ_1. Possiamo supporre che $\mathbf{v}_1$ sia di norma 1 e sappiamo che l'autovalore è reale per la Proposizione 0.1.5. Costruiamo un'intera base di $\mathbb{R}^n$ che abbia $\mathbf{v}_1$ come primo vettore, e pur di applicare il procedimento di Gram-Schmidt, possiamo supporre di avere una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. In generale, a parte $\mathbf{v}_1$ questi vettori non sono autovettori. Se quindi prendiamo la matrice invertibile P_1 che ha questi vettori come colonne, avremo che P_1 è sicuramente una matrice ortogonale per la Proposizione 0.1.2, e avremo, scrivendo la matrice a blocchi,

$$P_1^{-1}AP_1 = P_1^T AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $P_1^T AP_1$ è simmetrica: infatti calcolando la sua trasposta

$$(P_1^T AP_1)^T = P_1^T A^T P_1 = P_1^T AP_1$$

si riottiene la matrice di partenza perché A è simmetrica. Ne segue che $B = 0$ e che A_1, che è di ordine $n - 1$, è anch'essa simmetrica.

Possiamo allora usare l'ipotesi induttiva e trovare una matrice ortogonale Q di ordine $n - 1$ con la proprietà che $Q^T A_1 Q = D_1$, una matrice diagonale di ordine $n - 1$. Consideriamo quindi la matrice, scritta a blocchi,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

La matrice P_2 è di nuovo ortogonale, perché le sue colonne sono ortonormali. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} (P_1P_2)^T A(P_1P_2) &= P_2^T (P_1^T AP_1)P_2 \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

e questa è una matrice diagonale. Rimane da dimostrare che P_1P_2 è ancora una matrice ortogonale. Ma ciò è facile:

$$(P_1P_2)^T P_1P_2 = P_2^T (P_1^T P_1)P_2 = P_2^T P_2 = I \tag{3}$$

come richiesto.

Viceversa: supponiamo ora che la matrice sia ortogonalmente diagonalizzabile. Si ha: $P^T AP = D$ dove P è ortogonale e D è diagonale. Allora ci ricaviamo A da questa espressione: $A = PDP^T$. Questa matrice è simmetrica. Infatti, calcolando la sua trasposta $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$, in quanto una matrice diagonale è chiaramente simmetrica. Questo conclude la dimostrazione.

□