

## 0.1 Coordinate in uno spazio vettoriale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  costruito sul campo  $K$ . D'ora in poi, ogni volta che sia fissata una base di  $V$ , supporremo che essa sia ordinata. Se  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  è una base ordinata di  $V$ , allora ogni vettore di  $V$  si scrive in un solo modo come combinazione lineare dei vettori di  $\mathcal{B}$ . Se  $\mathbf{v} \in V$  e risulta:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n, \quad (1)$$

diremo che la  $n$ -pla  $(x_1, \dots, x_n)$  è la  $n$ -pla delle *coordinate* di  $\mathbf{v}$ , valutate rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Sarà spesso conveniente pensare a questa  $n$ -pla come vettore colonna e spesso quindi parleremo della colonna delle coordinate  $(x_1, \dots, x_n)^T$ .

*Esempio 0.1.1.* Se  $V$  è lo spazio delle matrici quadrate  $2 \times 2$  sui reali, e  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  è la base ordinata naturale di  $V$ , allora la colonna delle coordinate del vettore  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  è la colonna  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Se fissiamo una diversa base di  $V$ ,

ad esempio  $\mathcal{B}'$  costituita dalle seguenti matrici, nell'ordine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(verificare che esse costituiscono veramente una base!) allora la colonna delle coordinate dello stesso vettore  $A$  rispetto a questa nuova base è  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  ed infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostriamo ora che questo modo di associare ad ogni vettore le sue coordinate rispetto ad una base fissata è un isomorfismo.

**Proposizione 0.1.2.** *Siano  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  sul campo  $K$  e  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una base ordinata di  $V$ . L'applicazione  $\chi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n$  che associa ad ogni vettore di  $V$  la colonna delle sue coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$ , è un isomorfismo tra  $V$  e  $K^n$ .*

*Dimostrazione.* Proviamo intanto che  $\chi_{\mathcal{B}}$  è lineare. Siano

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n, \quad (2)$$

due vettori di  $V$  espressi come combinazione lineare dei vettori della base fissata. Allora le loro coordinate nella base assegnata sono:

$$\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = (y_1, \dots, y_n)^T, \quad (3)$$

Essendo

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n. \quad (4)$$

si ha, per definizione di coordinate,

$$\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = ((x_1 + y_1), \dots, (x_n + y_n)) = \chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) + \chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}). \quad (5)$$

L'applicazione  $\chi_{\mathcal{B}}$  trasforma dunque somme in somme.

Proviamo ora che  $\chi_{\mathcal{B}}$  soddisfa anche la seconda condizione di linearità. Se  $k \in K$ , allora è

$$k\mathbf{v} = k(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) = (kx_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (kx_n)\mathbf{v}_n; \quad (6)$$

da cui risulta:

$$\chi_{\mathcal{B}}(k\mathbf{v}) = (kx_1, \dots, kx_n) = k\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}). \quad (7)$$

Abbiamo così verificato che  $\chi_{\mathcal{B}}$  è lineare.

Proviamo ora che  $\chi_{\mathcal{B}}$  è suriettiva. Se  $(z_1, \dots, z_n) \in K^n$ , sia

$$\mathbf{u} = z_1\mathbf{v}_1 + \cdots + z_n\mathbf{v}_n. \quad (8)$$

Poiché risulta  $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = (z_1, \dots, z_n)$ , allora  $(z_1, \dots, z_n) \in \text{Im}\chi_{\mathcal{B}}$  e  $\chi_{\mathcal{B}}$  è quindi suriettiva. Infine, essendo la dimensione di  $V$  uguale alla dimensione di  $K^n$  l'applicazione è anche iniettiva, per il Teorema delle dimensioni. Segue allora che l'applicazione lineare  $\chi_{\mathcal{B}}$  è un isomorfismo di  $V$  in  $K^n$ , come richiesto.  $\square$

Per la proposizione precedente ogni spazio vettoriale  $n$ -dimensionale costruito sul campo  $K$  è isomorfo allo spazio  $K^n$ . Per questo motivo  $K^n$  è, a volte, detto il *modello universale* per gli spazi vettoriali  $n$ -dimensionali su  $K$ .

*Osservazione 0.1.3.* Osserviamo che la proposizione precedente implica che se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  costruito sul campo  $K$  e  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  una base ordinata di  $V$ , allora, valutando le coordinate dei vettori rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , si ha che:

la  $n$ -pla delle coordinate della somma di due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  di  $V$  è la somma delle  $n$ -ple delle coordinate di  $\mathbf{v}$  e di  $\mathbf{w}$ ,

la  $n$ -pla delle coordinate del prodotto dello scalare  $k$  per il vettore  $\mathbf{v}$  è data dal prodotto di  $k$  per la  $n$ -pla delle coordinate di  $\mathbf{v}$ .

## 0.2 Endomorfismi e diagonalizzazione

Sia  $L : V \rightarrow V$  un endomorfismo di un dato spazio vettoriale. Abbiamo visto che, una volta fissata una base di  $V$ , risulta determinata una matrice associata all'endomorfismo che sarà necessariamente quadrata. In questa sezione vogliamo studiare come cambia la matrice associata al cambiare della base fissata, e, in particolare, se ci sono delle scelte di base per cui la matrice assuma una forma più semplice. Ci occorre un semplice

**Lemma 0.2.1.** *Se  $A$  e  $B$  sono due matrici  $m \times n$  e se  $AX = BX$  per ogni vettore  $X \in K^n$  allora le due matrici sono uguali:  $A = B$ .*

*Dimostrazione.* L'uguaglianza vale qualunque sia  $X \in K^n$  e quindi in particolare vale se prendiamo  $X = E_i$  dove  $E_i$  è la  $i$ -esima colonna della matrice identità,  $i = 1, \dots, n$ . Ma il prodotto di una matrice per la colonna  $E_i$  dà come risultato la  $i$ -esima colonna della matrice. Quindi  $AE_i = BE_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , significa che  $A$  e  $B$  hanno uguali le colonne ordinatamente, e pertanto sono uguali:  $A = B$ .  $\square$

**Proposizione 0.2.2.** *Se  $L : V \rightarrow V$  è un endomorfismo, sia  $M_{\mathcal{B}}$  la matrice associata a  $L$  rispetto ad una base  $\mathcal{B}$  e sia  $M_{\mathcal{D}}$  la matrice di  $L$  rispetto ad una seconda base  $\mathcal{D}$ . Allora abbiamo*

$$P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{D}}P_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \quad (9)$$

*Dimostrazione.* Se rappresentiamo l'endomorfismo in coordinate esso si rappresenta come una moltiplicazione per una matrice  $M_{\mathcal{B}}$  oppure  $M_{\mathcal{D}}$  e la relazione che dobbiamo dimostrare si può visualizzare mediante il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}} & \mathbb{R}^n \\ P_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow P_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{\mathcal{D}}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Quello che dobbiamo dimostrare equivale a dire che cominciando con un vettore in alto a sinistra possiamo arrivare ad un vettore in basso a destra seguendo due percorsi differenti: nei due casi si raggiunge, tuttavia, lo stesso risultato.

Per la dimostrazione ricordiamo le seguenti relazioni che nel caso di un endomorfismo sono

$$\chi_{\mathcal{B}}(L(\mathbf{v})) = M_{\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}). \quad (10)$$

$$\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{v}) = P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) \quad (11)$$

La prima ci dice il legame tra le coordinate di un vettore  $\mathbf{v}$  e della sua immagine  $L(\mathbf{v})$ . La seconda invece dà il legame tra le coordinate dello stesso vettore in due basi diverse.

Ragioniamo così : come detto, sia  $M_{\mathcal{B}}$  la matrice associata a  $L$  nella base  $\mathcal{B}$  e  $M_{\mathcal{D}}$  la matrice associata a  $L$  nella base  $\mathcal{D}$ . Allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) &= \chi_{\mathcal{B}}(L(\mathbf{v})) \text{ per la (10)} \\ P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) &= P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(L(\mathbf{v})) \text{ moltiplicando a sinistra per } P_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \\ &= \chi_{\mathcal{D}}(L(\mathbf{v})) \text{ per la (11)} \\ &= M_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{D}}(\mathbf{v}) \text{ per la (10)} \\ &= M_{\mathcal{D}}P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) \text{ per la (11)} \end{aligned} \quad (12)$$

Abbiamo così ottenuto l'uguaglianza

$$P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = M_{\mathcal{D}}P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) \quad (13)$$

valida qualunque sia il vettore  $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$  e per il Lemma 0.2.1 abbiamo la conclusione.  $\square$

**Corollario 0.2.3.** *Nelle ipotesi della proposizione si ha che due matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo in basi diverse sono simili.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che la matrice  $P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$  è invertibile e che la sua inversa è  $P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ . Allora la relazione (9) si può riscrivere come

$$M_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}M_{\mathcal{D}}P_{\mathcal{D}\mathcal{B}} \quad (14)$$

e dunque le due matrici sono simili.  $\square$

**Corollario 0.2.4.** *Due matrici dello stesso endomorfismo hanno lo stesso determinante, la stessa traccia e lo stesso polinomio caratteristico*

*Definizione 0.2.5.* Alla luce del corollario precedente possiamo quindi definire il determinante, la traccia e il polinomio caratteristico di un endomorfismo come il determinante, la traccia e il polinomio caratteristico di una sua qualunque matrice associata.

*Definizione 0.2.6.* Possiamo definire altresì un endomorfismo diagonalizzabile se una sua matrice associata è diagonalizzabile.

*Esempio 0.2.7.* Calcolare il determinante, la traccia, gli autovalori e gli autovettori della proiezione ortogonale  $P_r : V_2 \rightarrow V_2$  su una retta passante per l'origine.

Abbiamo già calcolato in precedenza la matrice standard associata a questo endomorfismo. Abbiamo trovato  $\begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{\ell^2+m^2} & \frac{\ell m}{\ell^2+m^2} \\ \frac{\ell m}{\ell^2+m^2} & \frac{m^2}{\ell^2+m^2} \end{pmatrix}$ . Questa è la matrice associata all'endomorfismo nella base canonica. Potremmo quindi procedere a studiare il determinante, la traccia e la diagonalizzazione di questa matrice. In questo esempio, tuttavia, è più semplice sfruttare la proposizione appena dimostrata e scegliere una base diversa da quella canonica che è più adatta alla situazione specifica. Prendiamo quindi come base ordinata quella costituita come primo vettore dal vettore direttore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$  e come secondo vettore il vettore perpendicolare  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} m \\ -\ell \end{pmatrix}$ . Per trovare la matrice della proiezione  $P_r$  associata alla nuova base ordinata  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  secondo la definizione calcoliamo facilmente

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} = 1\mathbf{v} + 0\mathbf{u} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{0} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{u} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice richiesta è quindi  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  che risulta diagonale e da cui si calcola immediatamente che  $\det P_r = 0$  e  $Tr(P_r) = 1$ .

Possiamo anche verificare la Proposizione 0.2.2: Sia  $P = P_{\mathcal{N}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & -\ell \end{pmatrix}$  la matrice che ha per colonne i vettori della base  $\mathcal{B}$  in termine della base canonica  $\mathcal{N}$ .

La sua inversa è  $\frac{1}{\ell^2+m^2} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & -\ell \end{pmatrix}$ . Abbiamo in effetti:

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P &= \frac{1}{\ell^2+m^2} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & -\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & -\ell \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\ell^2+m^2} \begin{pmatrix} \ell^2 & \ell m \\ m\ell & m^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

come richiesto.

*Esempio 0.2.8.* Sia  $P_r$  la proiezione ortogonale sulla retta  $r$  passante per l'origine e di parametri direttori  $\ell = 1, m = 2$ . Calcolare l'immagine di  $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ . Calcolare inoltre gli autovettori e autovalori e disegnare gli autospazi di  $P_r$ .

La matrice standard, cioè quella relativa alla base canonica o base standard o base naturale  $\mathcal{N} = (\vec{i}, \vec{j})$  associata all'operatore in questione è (v. formula) è

$$M_{\mathcal{N}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$P_r(\vec{v}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 14/5 \end{pmatrix}$$

è l'immagine cercata.

Per calcolare gli autovalori e autovettori

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \lambda - \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0$$

da cui gli autovalori sono  $\lambda = 1, 0$ . Gli autospazi si calcolano risolvendo i relativi SLO.

$E_0(P_r)$ : La matrice del SLO è  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$  da cui l'equazione  $\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y = 0$  ossia la retta di equazione  $x + 2y = 0$ .

$E_1(P_r)$ : La matrice del SLO è  $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$  da cui l'equazione  $\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 0$  ossia la retta di equazione  $2x - y = 0$ .

Sia  $\mathcal{D} = (\vec{v}, \vec{u})$  dove  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$  e  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ . Allora la matrice del cambiamento di base

$$P_{\mathcal{N}\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$M_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{N}\mathcal{D}}^{-1} M_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{N}\mathcal{D}}$$

e cioè

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il disegno è

