0.1 Arco di curva regolare

Se RC($O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) è un riferimento cartesiano fissato per lo spazio euclideo E, e se $\overrightarrow{v}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ è una funzione a valori vettoriali definita in I, consideriamo il seguente insieme $\mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(t)}$ di punti dello spazio:

$$\mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(t)} = \{P(t) \in (x(t), y(t), z(t)) \colon \forall t \in I\}. \tag{1}$$

esso è l'immagine dell'applicazione $\overrightarrow{v}(t)$ e si dice arco di curva.

Diremo che l'arco di curva è *semplice* in I, se l'applicazione è iniettiva.

Diremo che la funzione $\overrightarrow{v}(t)$ è una funzione a valori vettoriali *regolare* in I se essa è di classe C^1 in I e se inoltre:

$$\overrightarrow{v}'(t) \neq \overrightarrow{0}, \quad \forall t \in I. \tag{2}$$

Se la funzione $\overrightarrow{v}(t)$ è regolare, diremo che le *equazioni parametriche*:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad \forall t \in I. \tag{3}$$

forniscono una *rappresentazione regolare* di $\mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(t)}$. Quest'ultimo, dotato di una tale rappresentazione, viene detto un *arco di curva regolare*.

Se la funzione è definita su un intervallo chiuso $[a, b]$ diremo che essa è semplice se è semplice su (a, b) e regolare se è regolare su (a, b).

Si osservi la distinzione fatta tra l'insieme dei punti e una sua rappresentazione. Ad esempio, la retta del piano passante per l'origine di equazione cartesiana $y = x$ può essere pensata come la curva ottenuta come immagine dell'applicazione $\overrightarrow{v} : \mathbb{R} \to V_2,\ t \mapsto (t, t)$. Queste sono le ben note equazioni parametriche della retta in questione. Tuttavia lo stesso insieme di punti della retta $y = x$ si può ottenere anche come immagine della applicazione $\overrightarrow{w} : \mathbb{R} \to V_2\ t \mapsto (t^3, t^3)$. Queste sono due parametrizzazioni diverse della stessa curva piana. Nel primo caso il vettore $\overrightarrow{v}'(t) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, cioè una funzione vettoriale costante che non è mai nulla. Nel secondo caso, invece, abbiamo $\overrightarrow{w}'(t) = (2t^2)\overrightarrow{i} + (2t^2)\overrightarrow{j}$ che si annulla per $t = 0$ e dunque non è una parametrizzazione regolare. In altre parole, quando si parla di arco di curva regolare si sta assumendo di avere una certa parametrizzazione con le proprietà indicate sopra e non dipende solo dall'insieme dei punti, che a volte viene chiamato il *sostegno* della curva. Possiamo pensare al sostegno della curva come la traiettoria di un punto in movimento al variare del tempo t. Con questa interpretazione il vettore $\overrightarrow{v}'(t)$ rappresenta la velocità del punto in movimento. Nel nostro esempio, $\overrightarrow{v}(t)$ si tratta di un punto che si sposta sulla bisettrice del primo e terzo quadrante con velocità costante $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre $\overrightarrow{w}(t)$ descrive un punto che si muove sulla stessa retta ma con velocità variabile e che si annulla nell'istante $t = 0$.

Più in generale due curve parametriche $\phi : I \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^3$ si dicono *equivalenti* se esiste un cambiamento di parametro, ossia un'applicazione $g : I \to J$ derivabile con derivata continua, tale che $g'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ per cui sia

$$\phi(t) = \psi \circ g(t)$$

La funzione g viene a volte detta *diffeomorfismo*. Con il termine *curva* si denota a volte la classe di equivalenza di queste curve parametriche.

Esempio 0.1.1. Se $I = [0,1]$ e $J = [0,2\pi]$ l'applicazione $\phi : I \to J, t \mapsto 2\pi t$ è un diffeomorfismo, in quanto è derivabile e invertibile e quindi la curva $(\cos s, \sin s), s \in J = [0,2\pi]$ è equivalente alla curva $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in I = [0,1]$.

Esempio 0.1.2. La circonferenza di raggio 3 e centro nell'origine è una curva piana di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 9$. Essa può essere pensata come il sostegno della curva parametrica

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

Queste equazioni descrivono il moto di un punto che, quando t aumenta, cioè "col passar del tempo", si muove sulla circonferenza in senso antiorario, mentre le equazioni

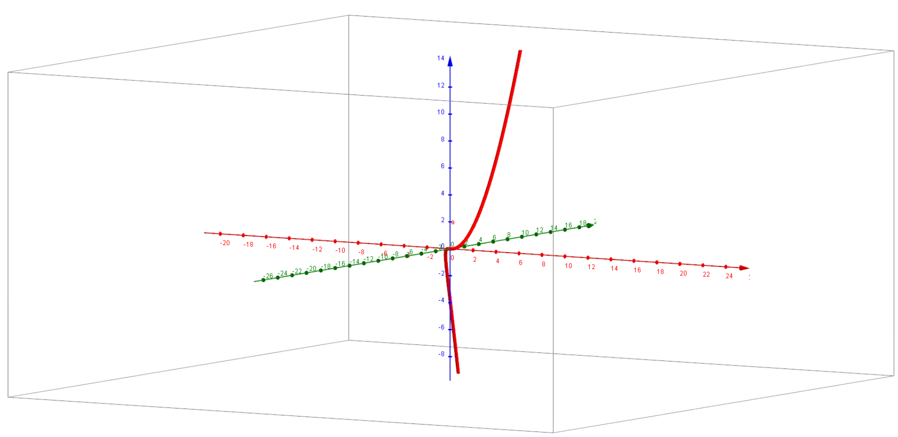
$$\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$$

descrivono un punto che si muove in senso orario. In entrambi i casi il vettore velocità non è mai nullo.

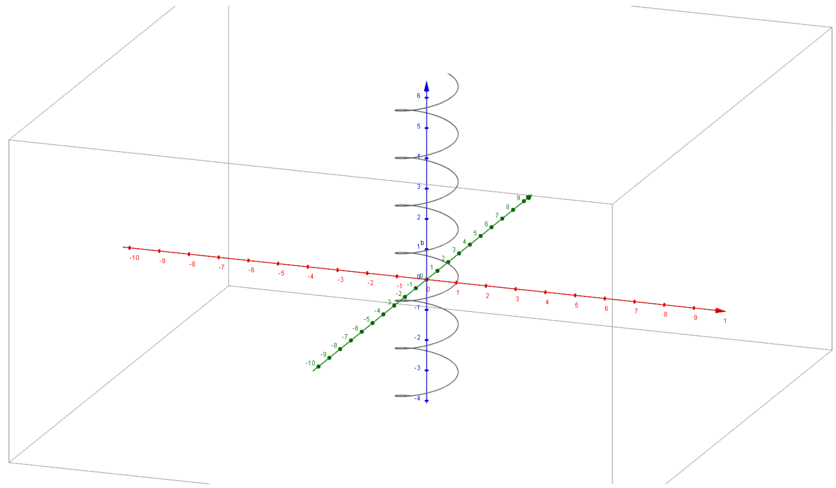
Ogni retta, dotata di equazioni parametriche $x = a + lt,\ y = b + mt,\ z = c + nt$, è un arco di curva regolare.

Altri esempi di archi di curva regolari sono forniti da quelli di equazioni parametriche seguenti:

Esempi 0.1.3. *cubica gobba*: $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3; \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

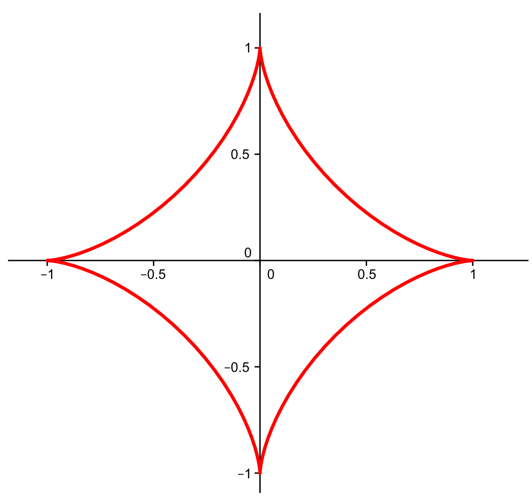


elica circolare: $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t; \quad \forall t \in \mathbb{R}$.



D'altra parte la curva, detta *astroide* di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (\cos t)^3 \\ y = (\sin t)^3 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{4}$$



non è una curva regolare in quanto $(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ si annulla per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Essa è tuttavia una curva regolare a tratti secondo la seguente definizione.

Definizione 0.1.4. Un arco di curva si dice regolare a tratti se l'intervallo su cui è definito si può suddividere in un numero finito di sottointervalli in modo tale che su ciascuno di essi l'arco sia regolare.

0.2 Lunghezza di una curva e ascissa curvilinea

Sia $\mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(t)}$ arco di curva semplice e regolare di equazioni parametriche 3, con $\overrightarrow{v}(t)$ funzione regolare in I. Dati t_1 e t_2 valori distinti del parametro $t \in I$ ai quali corrispondono i punti $P(t_1)$ e $P(t_2)$ distinti della curva, la distanza $d(P(t_1), P(t_2))$ eguaglia il modulo $|\overrightarrow{v}(t_2) - \overrightarrow{v}(t_1)|$.

Sia n un numero naturale positivo. Se a e b sono due valori distinti del parametro $t \in I$, con $a < b$, suddividiamo l'intervallo chiuso da essi limitato in n intervalli di uguale lunghezza positiva Δt, pari al rapporto $(b - a)/n$, determinando convenienti valori $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ del parametro $t \in I$, tali che sia $a = t_0$, $b = t_n$ e che:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1} = \Delta t > 0.$$

Restano individuati i punti $P_0 = P(t_0), P_1 = P(t_1), \ldots, P_n = P(t_n)$, a due a due distinti e appartenenti alla curva $\mathcal{C}$. I segmenti $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ formano una poligonale la cui lunghezza è data da:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\overrightarrow{v}(t_{i+1}) - \overrightarrow{v}(t_i)|. \tag{5}$$

Poiché $\Delta t > 0$, la 5 si può anche scrivere:

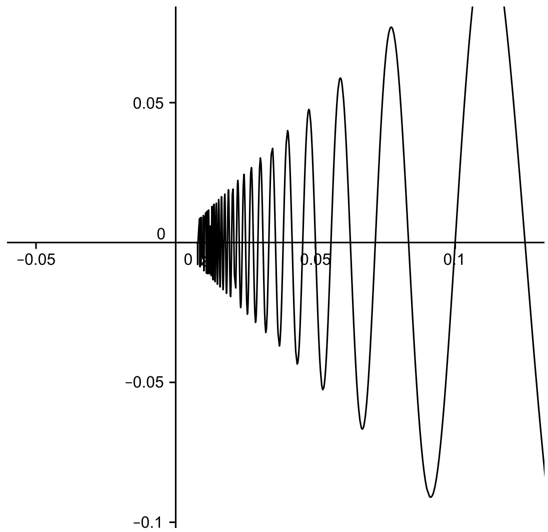
$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\overrightarrow{v}(t_{i+1}) - \overrightarrow{v}(t_i)|}{\Delta t} \Delta t. \tag{6}$$

Quanto più è grande n, tanto più è piccolo Δt e, corrispondentemente, tanto più tale misura si approssima a quella che noi, intuitivamente, definiremmo la lunghezza dell'arco di curva compreso tra $P(a)$ e $P(b)$.

Pertanto, se $a < b$, diremo *lunghezza* dell'arco di curva compreso tra $P(a)$ e $P(b)$ l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le possibili poligonali descritte sopra. Se tale estremo superiore è finito l'arco di curva si dice *rettificabile*.

Ci sono curve non rettificabili, come, ad esempio, la curva grafico della funzione (v. figura)

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ x \sin \frac{\pi}{2x} \text{ se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



In questo caso si verifica che l'estremo superiore è infinito. Tuttavia se la curva è regolare si può dimostrare che tale estremo superiore è sempre finito e coincide con il seguente integrale definito:

$$\int_a^b \left|\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \tag{7}$$

Si dimostra anche che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione.

Esempio 0.2.1. Nel caso di un arco di circonferenza descritto da

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

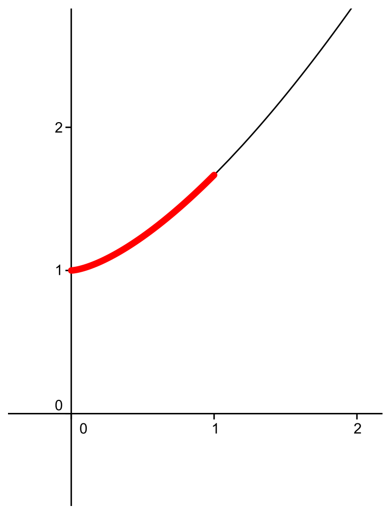
abbiamo $(x'(t) = -r\sin t, y'(t) = r\cos t)$ e quindi la lunghezza del'arco di circonferenza è $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\ dt = \int_{t_1}^{t_2} r\ dt = r(t_2 - t_1)$.

Esempio 0.2.2. Se la curva piana regolare ha equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

allora la lunghezza della curva è $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\ dt$.

Per esempio, possiamo calcolare la lunghezza del grafico della funzione $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$ per x da 0 a 1, v. figura.



La derivata è $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$. Abbiamo

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx = \int_1^2 \sqrt{u}\ du$$

avendo posto $u = 1 + x$,

$$= \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Esempio 0.2.3. Calcolare la lunghezza dell'astroide di equazione.

$$\begin{cases} x = a(\cos t)^3 \\ y = a(\sin t)^3 \end{cases} \quad , a > 0, t \in [0, 2\pi] \tag{8}$$

Per la simmetria della curva calcoleremo un quarto della curva, per $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ e poi moltiplicheremo per 4: $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ e $\gamma'(t) = (-3a\cos^2 t \sin t, 3a\sin^2 t\cos t)$ da cui

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}$$

$$= 3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a|\cos t\sin t|$$

Nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ la funzione è positiva e quindi la lunghezza cercata è uguale a

$$3a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\ dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$

In totale dunque la lunghezza dell'astroide è $6a$.

Esempio 0.2.4. Se la curva è data in coordinate polari $r = f(\theta)$ la formula della lunghezza si scrive

$$\int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\ d\theta.$$

Infatti, questa formula si ottiene con semplici passaggi dalla (7) ricordando che le equazioni parametriche della curva sono $(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$. Possiamo in tal modo calcolare, ad esempio, la lunghezza della cardioide $r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Sapendo che $f'(\theta) = 2\sin\theta$, la formula ci dà :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\sin\theta)^2 + (2 - 2\cos\theta)^2}\; d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\; d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\; d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\; d\theta \\
&= 8\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8(1+1) = 16
\end{aligned} \tag{9}$$

Naturalmente, se $a > b$, lo scalare definito dalla (7) risulta uguale all'opposto della lunghezza dell'arco di curva delimitato dai punti $P(a)$ e $P(b)$. Nel seguito, se $t_0 \in I$, definiremo *ascissa curvilinea* $s(t)$ del punto $P = P(t)$ della curva $\mathcal{C}$, rispetto all'*origine* $P(t_0)$ dell'arco, la funzione scalare:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\overrightarrow{v}}{d\tau}\right| d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2}d\tau. \tag{10}$$

Proposizione 0.2.5. *Sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(t)}$ l'arco di curva regolare di equazioni parametriche (3), ove $\overrightarrow{v}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ è una funzione regolare in I. Sia J l'insieme dei valori assunti dalla funzione $s(t)$, definita in (10). L'ascissa curvilinea $s(t)$ del punto $P = P(t)$ appartenente a $\mathcal{C}$ è una funzione biiettiva di I in J, di classe C^1 con derivata $s'(t)$ mai nulla in I. Si ha inoltre:*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\overrightarrow{v}}{d\tau}\right| d\tau = \left|\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right|. \tag{11}$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 10 e dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale segue che $s(t)$ è derivabile e che la sua derivata è espressa dalla (11). Poiché $\overrightarrow{v}(t)$ è regolare, $\overrightarrow{v}'(t)$ è continua e $\overrightarrow{v}'(t) \neq \overrightarrow{0}$ (cfr. 2). Pertanto il modulo $|\overrightarrow{v}'(t)| = s'(t)$ è continuo e non nullo. Essendo $s'(t) \neq 0$, la funzione $s(t)$ è strettamente crescente in I, quindi iniettiva. Ne segue la sua biiettività, per la definizione di J. $\square$

Osservazione 0.2.6. Sappiamo dalla teoria del calcolo differenziale e integrale che la funzione $t(s)$ inversa di $s(t)$ è una funzione reale di una variabile reale di J in I, biiettiva, di classe C^1, con derivata $t'(s)$ mai nulla in J.

Nelle ipotesi della Proposizione 0.2.5, è allora possibile considerare la funzione $\overrightarrow{w}(s) = \overrightarrow{v}[t(s)]$ definita in J. Possiamo quindi riparametrizzare la curva:

Proposizione 0.2.7. *La funzione $\overrightarrow{w}(s) = \overrightarrow{v}[t(s)] = x[t(s)]\overrightarrow{i} + y[t(s)]\overrightarrow{j} + z[t(s)]\overrightarrow{k}$ è una funzione regolare in J. Inoltre:*

$$\mathcal{C}_{\overrightarrow{w}(s)} = \mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(t)}. \tag{12}$$

Dimostrazione. La continuità e la derivabilità $\overrightarrow{w}(s)$ discendono da quelle di $\overrightarrow{v}(t)$ e di $t(s)$. Si ha poi:

$$\overrightarrow{w}'(s) = t'(s)\overrightarrow{v}'(t). \tag{13}$$

Poiché $\overrightarrow{v}'(t) \neq \overrightarrow{0}$ e $t'(s) \neq \overrightarrow{0}$, dalla (13) segue che $\overrightarrow{w}'(s) \neq \overrightarrow{0}$. Infine, essendo continue $\overrightarrow{v}'(t)$ e $t'(s)$, tale risulta $\overrightarrow{w}'(s)$, come richiesto. □

Nel seguito, tratteremo di archi di curva regolare $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche del tipo:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s); \quad \forall s \in J, \tag{14}$$

ove il parametro s è l'ascissa curvilinea di $\mathcal{C}$.

Proviamo ora che:

Proposizione 0.2.8. *Sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\overrightarrow{v}(s)}$ arco di curva regolare di equazioni parametriche (14), ove $\overrightarrow{v}(s) = x(s)\overrightarrow{i} + y(s)\overrightarrow{j} + z(s)\overrightarrow{k}$ è una funzione regolare dell'ascissa curvilinea s, definita in J. Se $P = P(s)$ è un punto di $\mathcal{C}$, allora la retta t_P tangente a $\mathcal{C}$ in P è parallela al vettore:*

$$\overrightarrow{t}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) \neq \overrightarrow{0}. \tag{15}$$

Il vettore $\overrightarrow{t}(s)$ è un versore, cioè:

$$|\overrightarrow{t}(s)| = 1. \tag{16}$$

Infine, la funzione $\overrightarrow{t}(s)$ a valori vettoriali, definita in J, è continua.

Dimostrazione. Dimostreremo in seguito che la retta t_P tangente a $\mathcal{C}$ in P è parallela al vettore $\overrightarrow{t}(s)$, definito in (15). Per provare la (16) osserviamo che dalla (11), ponendo $t = s$, segue:

$$1 = \frac{ds}{ds} = \left|\frac{d\overrightarrow{v}}{ds}\right|. \tag{17}$$

Pertanto il vettore $\overrightarrow{t}(s) = \overrightarrow{v}'(s)$ ha modulo unitario, cioè la (16). La continuità di $\overrightarrow{t}(s) = \overrightarrow{v}'(s)$ segue dalla regolarità di $\overrightarrow{v}(s)$. □

L'ascissa curvilinea di dice anche *parametro arco* e la parametrizzazione si dice anche *a velocità unitaria.*

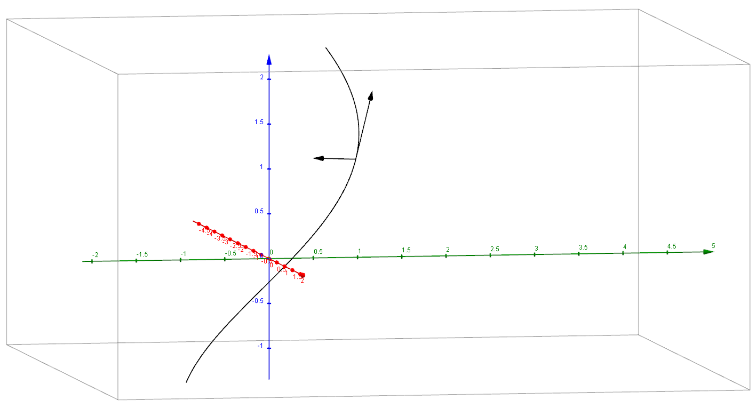
Esempio 0.2.9. L'elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, a, b costanti positive fissate, ha velocità $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ per cui

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \gamma'(t)\cdot\gamma'(t) = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

La velocità è dunque costante in modulo. Sia $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Se misuriamo l'ascissa curvilinea a partire dal punto in cui $t = 0$, allora $s(t) = \int_0^t c\,dt = ct$ da cui $t(s) = s/c$. Sostituendo abbiamo la riparametrizzazione

$$\alpha(s) = \gamma\left(\frac{s}{c}\right) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$$

Si vede facilmente che $\|\alpha'(s)\| = 1$ per ogni s e che $\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{2}$ e che $\alpha'(s)$ è perpendicolare a $\alpha''(s)$ per ogni s, (v. figura)



Il vettore $\overrightarrow{t}(s)$ è detto *versore tangente* a $\mathcal{C}$ in $P(s)$.