0.1 Coordinate in uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n costruito sul campo K. D'ora in poi, ogni volta che sia fissata una base di V, supporremo che essa sia ordinata. Se $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di V, allora ogni vettore di V si scrive in un sol modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Se $\mathbf{v} \in V$ e risulta:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n, \tag{1}$$

diremo che la n-pla $(x_1, \dots, x_n)$ è la n-pla delle *coordinate* di $\mathbf{v}$, valutate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sarà spesso conveniente pensare a questa n-pla come vettore colonna e spesso quindi parleremo della colonna delle coordinate $(x_1, \dots, x_n)^T$.

Esempio 0.1.1. Se V è lo spazio delle matrici quadrate 2×2 sui reali, e $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ è la base ordinata naturale di V, allora la colonna delle coordinate del vettore $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è la colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Se fissiamo una diversa base di V, ad esempio $\mathcal{B}'$ costituita dalle seguenti matrici, nell'ordine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(verificare che esse costituiscono veramente una base!) allora la colonna delle coordinate dello stesso vettore A rispetto a questa nuova base è $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostriamo ora che questo modo di associare ad ogni vettore le sue coordinate rispetto ad una base fissata è un isomorfismo.

Proposizione 0.1.2. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo K e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base ordinata di V. L'applicazione $\chi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$ che associa ad ogni vettore di V la colonna delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, è un isomorfismo tra V e K^n.*

Dimostrazione. Proviamo intanto che $\chi_{\mathcal{B}}$ è lineare. Siano

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n, \tag{2}$$

due vettori di V espressi come combinazione lineare dei vettori della base fissata. Allora le loro coordinate nella base assegnata sono:

$$\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = (y_1, \dots, y_n)^T, \tag{3}$$

Essendo

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(x_1+y_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(x_n+y_n)\mathbf{v}_n. \tag{4}$$

si ha, per definizione di coordinate,

$$\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=((x_1+y_1),\ldots,(x_n+y_n))=\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})+\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}). \tag{5}$$

L'applicazione $\chi_{\mathcal{B}}$ trasforma dunque somme in somme.

Proviamo ora che $\chi_{\mathcal{B}}$ soddisfa anche la seconda condizione di lienarità . Se $k \in K$, allora è

$$k\mathbf{v}=k(x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n)=(kx_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(kx_n)\mathbf{v}_n; \tag{6}$$

da cui risulta:

$$\chi_{\mathcal{B}}(k\mathbf{v})=(kx_1,\ldots,kx_n)=k\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}). \tag{7}$$

Abbiamo così verificato che $\chi_{\mathcal{B}}$ è lineare.

Proviamo ora che $\chi_{\mathcal{B}}$ è suriettiva. Se $(z_1,\ldots,z_n) \in K^n$, sia

$$\mathbf{u}=z_1\mathbf{v}_1+\cdots+z_n\mathbf{v}_n. \tag{8}$$

Poiché risulta $\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})=(z_1,\ldots,z_n)$, allora $(z_1,\ldots,z_n) \in Im\chi_{\mathcal{B}}$ e $\chi_{\mathcal{B}}$ è quindi suriettiva. Infine, essendo la dimensione di V uguale alla dimensione di K^n l'applicazione è anche iniettiva, per il Teorema delle dimensioni. Segue allora che l'applicazione lineare $\chi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di V in K^n, come richiesto. □

Per la proposizione precedente ogni spazio vettoriale n-dimensionale costruito sul campo K è isomorfo allo spazio K^n. Per questo motivo K^n è , a volte, detto il *modello universale* per gli spazi vettoriali n-dimensionali su K.

Osservazione 0.1.3. Osserviamo che la proposizione precedente implica che se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n costruito sul campo K e $\mathcal{B}=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ una base ordinata di V, allora, valutando le coordinate dei vettori rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ha che:

la n-pla delle coordinate della somma di due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di V è la somma delle n-ple delle coordinate di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{w}$,

la n-pla delle coordinate del prodotto dello scalare k per il vettore $\mathbf{v}$ è data dal prodotto di k per la n-pla delle coordinate di $\mathbf{v}$.

0.2 Matrici associate ad applicazioni lineari

Siano V e W due spazi vettoriali costruiti sul medesimo campo K di dimensioni finite n ed m, rispettivamente. Siano poi fissate una base $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ di V ed una base $\mathcal{D}=\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ di W.

Sappiamo che ad una matrice A è possibile associare una applicazione lineare $L_A:\mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Ora proveremo che ogni applicazione lineare da V in W può essere associata ad una matrice. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 0.2.1. Data una applicazione lineare $L\colon V \longrightarrow W$, consideriamo la matrice ad m righe ed n colonne ad elementi in K, la cui j-ma colonna ($j = 1, \ldots, n$) è data dalla colonna delle coordinate dell'immagine $L(\mathbf{v}_j)$ del j-mo vettore $\mathbf{v}_j$ di $\mathcal{B}$, valutata rispetto alla base $\mathcal{D}$. Tale matrice viene chiamata *matrice associata all'applicazione L, rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$* ed indicata con $M_{\mathcal{DB}}(L)$. (Attenzione all'ordine di scrittura delle basi.)

Vediamo subito un esempio.

Esempio 0.2.2. Sia $L : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ l'applicazione lineare definita da $L(p(x)) = p'(x)$ (la derivata prima). Ad esempio, $L(x^2 + 2x + 1) = 2x + 2$. Determinare la matrice associata a L rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\mathcal{D} = (1, x)$. Procediamo per passi. Per ogni vettore della prima base $\mathcal{B}$: prendo il vettore, lo trasformo con L, esprimo il risultato in termine della base $\mathcal{D}$ e ne prendo la colonna delle coordinate rispetto a $\mathcal{D}$:

$$1 \mapsto 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 \mapsto 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice desiderata

$$M_{\mathcal{DB}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio 0.2.3. Sia $V = M(2 \times 2)$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 sui reali e sia L l'endomorfismo di V definito da $L(A) = A^T$ (trasposizione). Trattandosi di un endomorfismo si può scegliere $\mathbb{B} = \mathbb{D} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. La matrice dell'endomorfismo si ottiene come segue

$$E_{11} \mapsto E_{11} = 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} \mapsto E_{21} = 0 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} \mapsto E_{12} = 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} \mapsto E_{22} = 0 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui abbiamo scelto la stessa base, come in questo caso, scriviamo

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(L) = M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riassumendo, assegnati due spazi vettoriali con basi ordinate fissate, siamo in grado di associare una matrice ad ogni applicazione lineare e viceversa. Le definizioni sono state date in modo tale che se si prende una applicazione lineare L, ad essa si associa la matrice $M = M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(L)$, e di tale matrice si considera l'applicazione ad essa associata L_M, si ritorna all'applicazione L da cui siamo partiti. Più precisamente, possiamo illustrare la situazione con il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\chi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\chi_{\mathcal{D}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_M"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

che va interpretato come segue: se voglio calcolare l'immagine di un vettore $\mathbf{v} \in V$ in W seguendo la freccia L posso anche calcolare le coordinate di $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$, moltiplicare per la matrice $M = M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ ottenendo un vettore in $\mathbb{R}^m$ e infine reinterpretando il risultato come coordinate di $L(\mathbf{v})$. Detto in altre parole, abbiamo la seguente

Proposizione 0.2.4. *Siano V e W due spazi vettoriali sul medesimo campo K, di dimensioni finite n ed m, con basi fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, rispettivamente. Assegnata un'applicazione lineare $L\colon V \longrightarrow W$, sussiste la seguente relazione:*

$$\chi_{\mathcal{D}}(L(\mathbf{v})) = M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}\chi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}). \tag{9}$$

Evidentemente, anche partendo da una matrice A, considerando l'applicazione L_A ad essa associata e costruendo la matrice associata a quest'ultima, si ritorna alla matrice di partenza, ovvero:

Proposizione 0.2.5. *Posto $L = L_A$, si ha $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(L) = A$.*

Esempi 0.2.6.

1) Siano ancora $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^2$; assegnate le basi $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0),(1,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$, rispettivamente, alla applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ così definita: $L(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+3z)$, è associata la matrice seguente:
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Infatti $L((1,1,0)) = (3,2)$, $L((1,0,1)) = (2,5)$, $L((0,1,1)) = (3,3)$, e poiché le colonne delle coordinate di $(3,2)$, $(2,5)$ e $(3,3)$, valutate rispetto alla base $\mathcal{B}'$, sono rispettivamente uguali a $(1,2)$, $(-3,5)$ e $(0,3)$, la matrice cercata è quella sopra scritta.

2) Vogliamo riottenere la matrice della rotazione di V_2 di un angolo θ vista all'inizio del capitolo. Fissiamo la base canonica $(\vec{i}, \vec{j})$ e procediamo secondo la definizione 0.2.1. Vediamo

$$\vec{i} \mapsto \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} \mapsto -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice desiderata ha questi due vettori come colonne, come visto in precedenza.

Proviamo ora che la matrice della composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle matrici delle singole applicazioni:

Proposizione 0.2.7. *Siano V, W e U tre spazi vettoriali sul medesimo campo K, di dimensioni finite n, m e p, con basi assegnate $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$, rispettivamente. Assegnate le applicazioni lineari $L\colon V \longrightarrow W$ ed $T : W \longrightarrow U$, considerata l'applicazione lineare composta $TL : V \longrightarrow U$, tra le matrici associate ad L, T, TL, sussiste la seguente relazione:*

$$M_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}(TL) = M_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}(T)M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(L), \tag{10}$$

cioè la matrice associata a TL è il prodotto della matrice associata a T per la matrice associata ad L.

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, scriveremo $M(L)$, $M(T)$, $M(TL)$ al posto di $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(L)$, $M_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}(T)$, $M_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}(TL)$ in tutto il corso della dimostrazione.

Assegnato $\mathbf{v} \in V$, poniamo:

$$\mathbf{w} = L(\mathbf{v}); \quad \mathbf{u} = TL(\mathbf{v}). \tag{11}$$

Denotiamo ora con $\chi(\mathbf{v})$, $\chi(\mathbf{w})$ e $\chi(\mathbf{u})$ le colonne delle coordinate di $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ed $\mathbf{u}$, valutate rispetto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ (rispettivamente). Dalla 9 segue allora che:

$$\chi(\mathbf{u}) = M(TL)\chi(\mathbf{v}). \tag{12}$$

D'altra parte

$$\mathbf{u} = T(L(\mathbf{v})) = T(\mathbf{w}). \tag{13}$$

Pertanto, esiste un altro modo per calcolare $\chi(\mathbf{u})$:

$$\chi(\mathbf{u}) = M(T)\chi(\mathbf{w}). \tag{14}$$

Inoltre è:

$$\chi(\mathbf{w}) = M(L)\chi(\mathbf{v}). \tag{15}$$

Sostituendo nella 14 il valore di $\chi(\mathbf{w})$ fornito dalla 15 segue:

$$\chi(\mathbf{u}) = M(T)M(L)\chi(\mathbf{v}). \tag{16}$$

Confrontando le 16 e 12 si trae:

$$M(TL)\chi(\mathbf{v}) = M(T)M(L)\chi(\mathbf{v}), \tag{17}$$

quale che sia il vettore $\mathbf{v} \in V$. Ne segue che $M(TL) = M(T)M(L)$, come richiesto. $\square$